Reta Konferenco pri Aplikoj de
Esperanto en Scienco kaj Tekniko

Klaus LEITH

Prelegeto kadre de KAEST 2020

Matematikaj esploroj (por ne-matematikistoj)

Klaus LEITH
Prelegeto kadre de KAEST 2020, oktobro 2020

Matematikaj esploroj (por ne-matematikistoj)

Ĉi tiu prelegeto celas inciti ne-matematikistojn al pensado pri propraj matematikaj esploroj. (Diletanto prezentas la aferon al aliaj nefakuloj. Ĝia matematika enhavo estas banala por fakuloj.)

Oni lernas pri matematiko en la lernejo, ĉar laŭ ĝenerala opinio matematiko gravas. Sed kion ekzakte oni lernas? Ŝajnas, ke ofte temas pli pri kalkulado ol matematiko. Por la ĉiutaga vivo la scipovo kalkuli certe utilas, kaj rilate la lernadon de kalkulmetodoj kvazaŭ neniu plendas aŭ dubas ilian utilecon, sed ...

Kalkulado ne egalas al matematiko

La distingon inter matematiko kaj kalkulado bele demonstras anekdoto[1] pri la fama matematikisto Carl Friedrich Gauss (1777 ─ 1855), kiam li ankoraŭ ne famiĝis (fakte kiam li estis malgranda knabo, por pruntepreni la vortojn de Antoine de Saint-Exupéry). Ĝi ankaŭ lernigas ion pri matematika pensado.

En la bazlernejo de Gauss la instruisto iutage taskis al siaj lernantoj la sumigon de la nombroj de unu ĝis cent. Temporaba afero! Supozeble la instruisto volis havigi al si iom da ripozo dum la leciono, kaj li antaŭvidis longegan paŭzon.

Surprize, preskaŭ tuj la juna Gauss metis sian ardezon kun sia rezulto sur la tablon de la instruisto, laŭ la tiutempa kutimo. La instruisto pensis ke la infano tute ne estis kalkulinta, sed senbaze imagis iun rezulton, do li ne atentis lin. Nur post ĉiuj finigis la taskon, la instruisto komencis trarigardi la ardezojn, kiuj kuŝis unu sur la alia sur sia tablo. La plej malsupra, la ardezo de Gauss, ege surprizigis lin: la rezulto estis ĝusta, sed ne akompanita per iuj ajn kalkulaj notaĵoj! Kiel la infano sukcesis trovi la rezulton tiel rapide kaj sen noti interajn paŝojn? Nu, dum la aliaj lernantoj ekkalkulis tiel ...

1			
+ **2**	=	3	
+ **3**	=	6	
+ **4**	=	10	
+ **5**	=	15	**ktp.**

... la juna Gauss sekvis pli ĝeneralan ideon pri adicio. Li sciis, ke la vicordo de la nombroj en iu sumigo tute ne gravas:

> **1 + 2** faras 3, samkiel **2 + 1** faras 3.
> **1 + 2 + 3 + 4** faras 10, samkiel **1 + 4 + 2 + 3** faras 10.

Sumigante la nombrojn de 1 ĝis 100, eblas do adicii la unuan nombron (**1**) kaj la lastan nombron (**100**), poste la duan nombron (**2**) kaj la antaŭlastan nombron (**99**), poste la trian nombron (**3**) kaj la praantaŭlastan nombron (**98**) ktp.

Kial procedi tiamaniere? Gauss rimarkis ke ĉiuj tiuj nombroparoj havas la saman sumon. Komparu du tiujn parojn: la diferenco inter ekzemple la unua nombroparo (**1 + 100**) kaj la dua nombroparo (**2 + 99**) estas, ke ni pliigis la unuan nombron en la paro je **unu** kaj malpliigis la duan nombron en la sama paro ankaŭ je **unu**. Entute, tiuj du ŝanĝoj ne aliigas la sumon de iu nombroparo, ĝi restas egala al 101:[2]

1 Ofte raportita surbaze de rakontaĵo de la maljuna Gauss mem, vd. ekz. Wussing (1974:10), Bell (1986[1937]:221).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{(1 + 100)} & \mathbf{+} & \mathbf{(2 + 99)} & \mathbf{+} & \mathbf{(3 + 98)} & \mathbf{+} & \mathbf{...} \\
\mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{...}
\end{array}$$

La tutan adicion ni ankoraŭ pli bone vidas, se ni notas ĝin tiel:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
 & \mathbf{1} & \mathbf{+} & \mathbf{2} & \mathbf{+} & \mathbf{3} & \mathbf{+} & \mathbf{\dots} & \mathbf{+} & \mathbf{48} & \mathbf{+} & \mathbf{49} & \mathbf{+} & \mathbf{50} \\
\mathbf{+} & \mathbf{100} & \mathbf{+} & \mathbf{99} & \mathbf{+} & \mathbf{98} & \mathbf{+} & \mathbf{\dots} & \mathbf{+} & \mathbf{53} & \mathbf{+} & \mathbf{52} & \mathbf{+} & \mathbf{51} \\
\hline
\mathbf{=} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{\dots} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101} & \mathbf{+} & \mathbf{101}
\end{array}$$

Rezultas **50** kolumnoj kun po du nombroj, kaj tiuj du nombroj ĉiufoje sumigas al **101**. Do la tuto de la kvindek kolumnoj egalas al

$$\mathbf{50 \times 101 = 5050}$$

Tio estis la nombro, kiun Gauss skribis sur sian ardezon kiel rezulton. Li trovis metodon por la rapida sumigo de cent nombroj. Eleganta solvo por enuiga kalkultasko, ĉu ne? Feliĉe la instruisto ekkonis la talenton de Gauss kaj tuj rekomendis lin por subtenata daŭriga studado.

Provu kalkuli la sumon de la nombroj de 1 ĝis 10 000, uzante la saman aliron kiel Gauss. Kiel vi sumigus la nombrojn de -10 ĝis +10 (do: -10, -9, ..., -2, -1, 1, 2, ..., 9, 10)? Kiel vi faru, kiam la nombro de la sumigendaj nombroj ne estas para (ekz. sumo de 1 ĝis 107, aŭ de 8 ĝis 114)? Kiel oni sumigas nur la parajn nombrojn inter 1 kaj 100 (do: 2, 4, 6, ..., 96, 98, 100), aŭ nur la nombrojn divideblajn per 3 (do: 3, 6, 9, ..., 93, 96, 99)? Ĉu vi povas elpensi du (rapidajn) metodojn por la sumigo de la nombroj de 101 ĝis 200? Ĉiuj solvoj eltroveblas pensante pri taŭgaj variantoj de la supra metodo.

Matematiko egalas al memstara pensado

La supra demonstraĵo ne celis lernigi kalkulmetodon por sumigo, sed intencis montri, ke propra aliro al iu matematika demando povas liveri pli efikan (tempo- kaj pen-ŝparan) solvon kompare kun iu rutina metodo, kiun oni aplikus blinde, laŭkutime, senpripensante, kaj krome povas ege plezurigi, ĉar la solvon oni trovis memstare, propramaniere.

En la matematiko ne regas iu ajn aŭtoritato krom la propra menso. Oni akceptu asertojn ne ĉar starigis ilin Arkimedo, Eŭklido, Pitagoro aŭ iu alia, sed ĉar la asertoj estas matematike pruvitaj. Tio ne premisas, ke ni nepre kapablu pruvi ĉiujn matematikajn asertojn per niaj propraj rimedoj, sed ke ni almenaŭ klopodu sekvi la rezonadon de matematika pruvo, juĝante ĝin kiel logikan. Ofte tio eblas ankaŭ por nefakuloj kun malprofundaj matematikaj spertoj. Cetere eĉ nefakuloj povas starigi originalajn pruvojn: ekzistas pli ol tricent diversaj pruvoj de la teoremo de Pitagoro, kaj multajn el ili elpensis nefakuloj.[3]

"Multon mi estus kompreninta, se oni ne estus eksplikinta ĝin al mi", aforisme plendis Stanisław Jerzy Lec. La kapablo ekspliki ion al si mem certigas sukcesan komprenon. Ne serĉu eksplikojn alie, antaŭ ol vi provis solvi iun problemon per propra pensado. Nepre evitenda estas la nura enmemorigo de alies

2 Matematike esprimita: Ni nomu la unuan nombron **a** kaj la duan nombron **b**. Ilia sumo egalas al **a + b**. Se ni pliigas **a** je 1 kaj malpliigas **b** je 1, la nova sumo egalas al **(a+1) + (b–1)**. Tio egalas al **a + 1 + b – 1**, aŭ en alia vicordo **a + b + 1 – 1**, kiu siavice egalas al **a + b**. Pli ĝenerale: Ni nomu **z** iun nombron; la sumo de **(a+z) + (b–z)** ne povas esti alia ol **a + b**.

3 Pri la teoremo ($a^2 + b^2 = c^2$) vd. https://eo.wikipedia.org/wiki/Teoremo_de_Pitagoro (kontrolita 2020-10-28), pri ĝiaj pruvoj vd. https://www.youtube.com/watch?v=0QSjOI9Tiws (esperantlingva, kontrolita 2020-10-28), http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml (kontrolita 2020-10-28), Maor (2007:98).

rezonado, kiun oni ne vere komprenas. Bedaŭrinde tion faras lernantoj pro manko de tempo, kiam ili devas iamaniere sukcese trapasi ekzamenon. Ni amatoroj feliĉe ne devas haste ekzameniĝi!

Se vi intencas esplori matematikon kun plezuro, faru viajn proprajn malkovrojn. Tio havigas multe pli grandan plezuron ol serĉi kaj apliki formulojn el libroj. Foje ludado kun nombroj gvidas al pli profundaj konsideroj, se oni pripensas, kio okazas "malantaŭ la kulisoj". Rigardu la suban ekzemplon.

Mensa eksperimento: cent ampoloj

Imagu cent ampolojn, ĉiuj malŝaltitaj, do malhelaj. La ampoloj estu numeritaj de 1 ĝis 100. Nun ni ŝaltas aŭ malŝaltas ilin laŭ tiu skemo:

- Ĉiun ampolon, kies numero divideblas per **1**, ni ŝaltas. Ĉar ĉiuj numeroj divideblas per unu, ni ŝaltas ĉiujn ampolojn, do ĉiuj heliĝas.
- Sekve, ĉiun ampolon, kies numero divideblas per **2** (do la ampolojn kun la numeroj **2**, **4**, **6**, **8**, **10** ktp.) ni re-ŝaltas. "Re-ŝalti" signifu ke la koncerna ampolo <u>malheliĝas</u>, se antaŭe ĝi <u>helis</u>, kaj ke ĝi <u>heliĝas</u>, se antaŭe ĝi <u>malhelis</u>. Alie esprimita, la re-ŝaltado renversas la brilan staton de la ampolo: hela iĝas malhela, malhela iĝas hela.
- Ni daŭrigas la re-ŝaltadon tra la ceteraj nombro de **3** ĝis **100**. Do ni re-ŝaltas ĉiun ampolon, kies numero divideblas per **3**, poste per **4**, **5** ktp. ĝis **100**.

Fine de la tuta ŝaltado, kiuj el la cent ampoloj brilas? Kial ĝuste nur tiuj?

Kion esplori?

En libroj kaj retpaĝoj popularigantaj matematikon, specife per distra matematiko[4], eblas trovi multajn ideojn por propraj esploroj.

Ĉu vi ŝatas ludojn, ĉe kiuj pri la venko ne decidas hazardo, sed la strategio de la ludantoj?[5] Al tiuj ludoj oni kalkulas[6] (perdonu la vortludon) altgrade kompleksajn ludojn kiel ŝako, sed feliĉe por niaj intencoj ankaŭ multe pli simplajn kiel "Kunligu kvar"[7] aŭ facilegajn matematikaĵojn kiel "iri ĝis 33"[8]. Esplorante tiajn ludojn, valoras komenci kun plisimpligita versio kaj poste alproksimiĝi al la laŭregulaj kondiĉoj en pliaj paŝoj.

Riĉa kampo por propraj matematikaj esploroj estas la kombinatoriko. Tie tipa demando estas, kiom da permutaĵoj, t.e. diversaj aranĝaĵoj, de iuj elementoj eblas. Ekzemplo: En vikipedia artikulo pri LEGO-ludbrikoj[9] oni asertas, ke ekzistas pli ol 85 miliardoj da ebloj kunmeti sep ludbrikojn (de certa formato). Kiel tion kalkuli? Se ni prenas nur du tiajn brikojn, la problemo facile solviĝas: oni elprovas ĉiujn eblajn kombinaĵojn (kaj fine trovas 24 unikajn). Sed jam la tria briko ege komplikas la aferon: la

4 Ekz. Bogomolny (2018), Capó (2016), Gardner (1959), Launay (2020).

5 Pri matematikaj ludoj kaj luda matematiko: Ahrens (2018 [1927]), Delahaye (1998 kaj 2017), Penszko (2009).

6 kalkuli: (i.a.) meti en ian kategorion, rigardi kiel (laŭ Waringhien (2020:515); https://vortaro.net/#kalkuli_kd, kontrolita 2020-10-28).

7 https://eo.wikipedia.org/wiki/Kunligu_Kvar (kontrolita 2020-10-28).

8 Górowski k.a. (2015) popaŝe analizas tiun ludon kaj similajn (https://scienca-revuo.info/article/1963, kontrolita 2020-10-28).

9 https://de.wikipedia.org/wiki/Lego#Kombinationsmöglichkeiten (kontrolita 2020-10-28).

nombro de eblaj kombinaĵoj multe plioblas! Kiel do eltrovi metodon por kalkuli la nombron de kombinaĵoj de pli ol du brikoj?[10]

Ĉu utilas komputilo?

La ludbrika problemo ŝajnas necesi la uzon de komputilo por konsidero de eblaj kombinaĵoj. Supozeble oni unue devas konstrui matematikan reprezenton de la kombinaĵoj, poste skribi komputilan programon por generi ĉiujn validajn (eliminante duoblaĵojn). La defioj do estas trovi ĝustan matematikan priskribon kaj traduki ĝin en komputilan algoritmon.

Kiam iu problemo demandas perfortan, grandskalan kalkuladon, tiam komputilo certe utilas. (Sed memoru: kalkulado ne egalas al matematiko.) Foje la rezulto de kalkulado formas elirpunkton por pliaj esploroj, kaj tiam komputilo eĉ malbaras la vojon al matematiko. Mi donas ekzemplon.

▷ Oni serĉas nombron kun speciala eco: ĝi finiĝas je certa cifero, kaj kiam oni forprenas tiun finan ciferon kaj metas ĝin antaŭ la nombron, oni multobligas la serĉitan nombron. Tiuspecan nombron mi nomas "ignatjeva nombro" (mallongige "i-nombro").[11] Ekzemplo de i-nombro estas 142857 (ĉu vere?[12]). Kelkaj i-nombroj ankaŭ nur havas ses ciferojn (ekz. la i-nombro kun la fina cifero **5** kaj **4-obligo**). Tiujn mallongajn i-nombrojn oni povas kalkuli permane en ne tro longa tempo.

Sed kio pri aliaj finaj ciferoj kaj obligoj? Ekzemple nombro kun fina cifero **8** kaj **6-obligo**[13]? Se oni devus permane kalkuli i-nombrojn, oni baldaŭ perdus la intereson (aŭ la racion). Anstataŭ kalkuli permane, oni laŭeble skribu komputilan programeton. Tiu elkalkulas la kompletan aron de i-nombroj (ne ekzistas tiom multaj). Kaj nun ni povas komenci la veran esploron: ĉe la ignatjevaj nombroj oni observas certajn interesajn fenomenojn ...

Do se vi scipovas iomete programi, verku proprajn programetojn por majstri temporabajn, tedajn kalkulojn. Alikaze, evitu tiun tipon de problemoj kaj koncentriĝu al aliaj, pli kalkulŝparemaj[14]. Kiel amatora esploristo vi ĝuas la plenplenan liberecon elekti la demandon, kiun vi volas pripensi, kaj la manieron, per kiu vi volas tion fari. Kaj ne hastu: matematikaj ideoj ofte necesas longan kovadon ĝis ilia maturiĝo.

Mi deziras al vi plezuron dum viaj matematikaj esploroj!

---

10 Matematikistoj en la hejmlando de la LEGO-ludbrikoj trovis 85 747 377 755 kombinaĵojn de sep brikoj: http://web.math.ku.dk/~eilers/lego.html (kontrolita 2020-10-28).

11 En sia libro Ignatjev (Ignatjew (1982:19, problemo 36) starigas la taskon trovi nombron kun fina cifero **2,** kiun oni **2-obligas** antaŭenmetante la finan ciferon. Rezultas, ke la serĉita nombro havas 18 ciferojn. Detaloj pri la kalkulmaniero troviĝas en mia retpaĝo https://esploru.wordpress.com.

12 Pruvo: 142857 iĝas 714285 post la antaŭenmeto de la fina cifero **7**, kaj

$$714285 / 142857 = 5$$

Tio konfirmas la i-nombrecon, do ĉi-kaze la i-nombro finiĝas je la cifero **7** kaj oni atingas **5-obligon** per antaŭenmeto de la fina cifero.

13 Ne elprovu kalkuli tiun permane, vi riskas malesperigon: ĉi tiu i-nombro havas 58 ciferojn.

14 Inspiraj: Gardner (1959), Tietze (1959).

Bibliografio

Ahrens, Wilhelm (2018 [1927]): *Mathematische Spiele*. Köln: Anaconda Verlag.

Bell, E[ric] T[emple] (1986 [1937]): *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

Bogomolny, Alexander (2018): "Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles", http://www.cut-the-knot.org (kontrolita 2020-10-28).

Capó Dolz, Miquel (2016): *100 cuestiones de matemáticas*. Barcelona: Lectio Ediciones.

Delahaye, Jean-Paul (1998): *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*. [Sen loko]: Pour la Science.

— (2017): *Les mathématiciens se plient au jeu*. Paris: Éditions Belins/Humensis.

Gardner, Martin (1959): *Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simon and Schuster.

Górowski, Jan; Łomnicki, Adam; Żabowski, Jerzy (2015): "Strategiaj ludoj". *Scienca Revuo* 65(232): 31-34.

Ignatjew, E. I. (1982): *Mathematische Spielereien*. Moskva: Verlag MIR / Leipzig, Jena, Berlin: Urania-Verlag. [Komuna eldono, traduko de: Ignatjev, E. I. (1979): *V carstve smekalki*. Moskva: Izdatelstvo "Naŭka".]

Launay, Mickaël (2020): "Bric-à-brac mathématique et ludique", https://www.micmaths.com (kontrolita 2020-10-28).

Maor, Eli (2007): *The Pythagorean theorem: a 4000-year history.* Princeton: Princeton University Press.

Penszko, Marek (2009): *Łamigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej*. Warszawa: Prószyński Media.

Waringhien, Gaston (2020, red.): *Plena Ilustrita Vortaro de Esperanto 2020*. Paris: Sennacieca Asocio Tutmonda.

Tietze, Heinrich (1959): *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit*. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung.

Wussing, Hans (1974): *Carl Friedrich Gauss*. 2a eldono. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.