Limesa profilo por hazardaj 2-cikloj

Lucas Teyssier*

Majo 2019

Résumé[1]

Nous présentons une amélioration du lemme de majoration de Diaconis, qui permet de calculer la valeur limite de la distance à la stationnarité. Nous l'appliquons ensuite aux transpositions aléatoires étudiées par Diaconis et Shahshahani.

Resumo

Ni prezentas plibonigon de la superbara lemo de Diaconis, kiu ebligas kalkuli la limesan valoron de la distanco al staranteco. Ni poste aplikas ĝin al hazardaj 2-cikloj studitaj de Diaconis kaj Shahshahani.

Abstract[2]

We present an improved version of Diaconis' upper bound lemma, which is used to compute the limiting value of the distance to stationarity. We then apply it to random transpositions studied by Diaconis and Shahshahani.

Enhavo

*Prononco : [lyka tesje]. Studento ĉe ENS kaj Sorbonne Université. Nuna retadreso : lucas.teyssier@ens.fr

[1]Cet article possède aussi une version en français.

[2]This article also has a version in English.

1 Enkonduko

1.1 Ĉefaj rezultoj

Estu $\mathfrak{S}_n$ la simetria grupo kun indico n kaj P_n la probablo sur $\mathfrak{S}_n$ difinita per

$$P_n(Id) = \frac{1}{n} \text{ kaj } P_n(\tau) = \frac{2}{n^2} \text{ se } \tau \text{ estas 2-ciklo.}$$

Ĝi estas la mikso per hazardaj 2-cikloj sur $\mathfrak{S}_n$, studita de Diaconis kaj Shahshahani en [8].
Estu U_n la uniforma probablo sur $\mathfrak{S}_n$. Se E estas aro kaj μ, ν estas probabloj sur E, ni difinas la tutvarian distancon[3] inter μ kaj ν per la formulo

$$\mathrm{d_{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\mathrm{d}_1(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|\mu(x)-\nu(x)|\,.$$

En [8], Diaconis kaj Shahshahani montras ke estas sojla fenomeno (aŭ kutofo, el *cutoff* anglalingve) ĉe $\frac{1}{2}n\log(n)$ por tiu hazarda promenado, t.e., se $f(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n)\right\rfloor$, ke por ĉiu $0<\epsilon<1$,

$$\mathrm{d_{TV}}\left(P_n^{*(1-\epsilon)f(n)}, U_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \text{kaj} \qquad \mathrm{d_{TV}}\left(P_n^{*(1+\epsilon)f(n)}, U_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Malgraŭ laborego realigita pri miksotempoj kaj pli speciale pri hazardaj 2-cikloj (vidu la referencojn sube), obteni precizan priskribon de la transiro restis ĝis nun malfermita problemo, formale proponita de Nathanaël Berestycki dum laborgrupo de AIM pri markovĉenaj miksotempoj en 2016 (`http://aimpl.org/markovmixing/5/`).
Jen nia ĉefa rezulto :

Teoremo 1.1. Estu $c\in\mathbb{R}$. Tiam ni havas :

$$\mathrm{d_{TV}}\left(P_n^{*\left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n)+cn\right\rfloor}, U_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d_{TV}}\left(\mathrm{Poiss}\left(1+e^{-2c}\right), \mathrm{Poiss}(1)\right),$$

kie $\mathrm{Poiss}(a)$ almontras la leĝon de Poisson kun parametro a.

[3]En la pruvoj ni uzos la distancon L^1, notaciitan d_1, por malpeziĝi je la faktoro $\frac{1}{2}$.

Limesprofilaj konjektoj

Ni antaŭvidas ke la limesa profilo $d_{\mathrm{TV}}\left(\mathrm{Poiss}\left(1+e^{-c}\right), \mathrm{Poiss}(1)\right)$, kiun ni obtenas tie se ni anstataŭigas la tempon $\left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n)+cn \right\rfloor$ per pli natura tempo, $\left\lfloor \frac{1}{2}(n\log(n)+cn) \right\rfloor$, aperos por multaj aliaj miksotempaj problemoj sur $\mathfrak{S}_n$, t.e. la problemoj kie la lastaj miksitaĵoj estas la fiksaj punktoj. Ŝajnas ke tiu propreco ofte aperas kiam la probablo P_n estas konstanta sur konjugklasoj. Ekzemple, uzante la rezultojn el [10], ni povas adapti nian pruvon al hazardaj k-cikloj (k fiksita) je la tempo $\left\lfloor \frac{1}{k}(n\log(n)+cn) \right\rfloor$, kaj ni konjektas ke ni ankoraŭ havos la saman limesan profilon por la hazardaj konjugklasoj kun kardinalo $o(n)$, studitaj en [3], sed ke estus teknike multe pli malfacile adapti nian pruvon tiukaze. Por tiu ĝenerala kazo, tre bela formulo (Propozicio 10.15 en [16]), uzita por pruvi la formulon de Stanley-Féray, kaj kiu ebligas esprimi ĉiujn reduktitajn karakterojn per ekspekto, $\chi^\lambda(\mu)=\mathbb{E}\left[(-1)^{\mathrm{inv}(\sigma_\mu)}\right]$, certe tre utilos.

Ni konjektas ke tiu profilo ankaŭ estos la bona profilo por la mikso per hazardaj involucioj studita de Megan Bernstein en [4], je la tempo $\left\lfloor \frac{1}{\log(p)}(\log(n)+c) \right\rfloor$. Por legi pri aliaj konataj limesaj profiloj, vidu [1] kaj [12].

1.2 Ligoj kun antaŭaj rezultoj kaj ideo de la pruvo

Ligoj kun antaŭaj rezultoj En 1981, Diaconis kaj Shahshahani montris en [8], uzante la reprezentoj de la simetria grupo, kutofon[4] ĉe $\left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n) \right\rfloor$ por la mikso per hazardaj 2-cikloj, donante asimptotajn neegalaĵojn je la tempo $\left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n)+cn \right\rfloor$, $c>0$ fiksita. En 1987, Matthews, en [15], rafinis tiujn rezultojn dank' al probableca pruvo. En 2011, Berestycki, Schramm kaj Zeitouni ĝeneraligis en [2] la antaŭan rezulton al mikso per hazardaj k-cikloj, por k fiksita kiam $n\to\infty$, tiel pruvante kutofon ĉe $\left\lfloor \frac{1}{k}n\log(n) \right\rfloor$, konjektita de Diaconis. Fine, en 2014, Berestycki kaj Şengül ĝeneraligis denove tiun rezulton en [3], al ajna konjugklaso kies subtenanto havas kardinalon $o(n)$, kaj tio sen grupreprezentoj.

La pruvo en [8] baziĝas sur la fama **superbara lemo de Diaconis**, kiu kondukas al sumo sur la nereduktelaj reprezentoj kiun ili delikate superbaras per reprezentoj kaj analizo. Fakte, oni povas observi ke la nura loko kie multa informo (ni perdas faktoron e en la limeso $c\to\infty$ de la limesa profilo) estas perdita pri la limesa profilo estas je la ekkomenco, kiam la neegalaĵo de Cauchy-Schwarz estas uzata en la pruvo de la superbara lemo. La sekcio 2 proponas rimedon por tiu informoperdo, plibonigante la superbaran lemon ĝis aproksimiga lemo (lemo 2.1), kiu asimptote estas multe pli preciza. La subsekcio 4.1, iom teknika, ĝeneraligas la asimptotajn superbarojn de Diaconis kaj Shahshahani al ajna $c\in\mathbb{R}$.

Alia kerna punkto de nia pruvo estas kungrupigi, en la sumoj sur la nereduktelaj reprezentoj $\lambda=(\lambda_1,\ldots)$ de $\mathfrak{S}_n$, ĉiujn dispartigojn havantajn la saman λ_1. Pli precize, La subsekcio 4.2 montras ke se ni fiksas $j\in\mathbb{N}^*$, ni povas studi la sumon sur la dispartigoj kie λ_1 valoras $n-j$ kiel sumo sur la dispartigoj de la entjero j, kio donas eksplicitajn kaj facile manipuleblajn formulojn.

Por kompreni el kie la limesa profilo venas, ni observu ke, dank' al la subbaro de Matthews, la ŝlosila observeblo estas la nombro de fiksaj punktoj. La limesa profilo estas la distanco inter la asimptota distribucio de la nombro de fiksaj punktoj je la tempo $\left\lfloor \frac{1}{2}n\log(n)+cn \right\rfloor$, Poiss $\left(1+e^{-2c}\right)$, kaj tiu de hazarda permuto, Poiss(1).

[4]Fakte ilia subbaro estas $1/e$ do ĝi ne ekzakte estas kutofo.

La ĉi-supre eldirita teoremo 1.1 subportas konjekton de Nathanaël Berestycki :

Konjekto 1.2. Estu τ_n la unua tempo kiam ĉiuj kartoj estas tuŝitaj, kaj X_{τ_n} la stato de la kartaro je tiu (hazarda) tempo. Tiam $\mathrm{d_{TV}}(X_{\tau_n}, U_n) \to 0$ kiam $n \to \infty$.

Alivorte, la konjekto diras ke τ_n estas haltotempo je kiu la hazarda permuto estas bone miksita por ĉiaj praktikaj celoj. Notu ke je la tempo $\tau_n - 1$, la permuto havas almenaŭ unu fikspunkton, kaj do ke $\mathrm{d_{TV}}(X_{\tau_n-1}, U_n)$ ne povas strebi al nul. Tiel, la konjekto implicas ke τ_n estas fortsence optimuma por miksi la kartaron.
Ni nun klarigos kiamaniere la ĉi-supra teoremo 1.1 estas ligita kun tiu konjekto. Por ĉiu tempo t, estu G_t la hazarda grafeo kiu enhavas edĝon (i, j) se kaj nur se la kunligita 2-ciklo estis aplikata almenaŭ unufoje antaŭ la tempo t. Tiam G_t esence estas la realigo de la hazarda grafeo de Erdős–Rényi kun parametroj n kaj $p = 1 - \exp(-t/\binom{n}{2})$. Eblas facile kontroli ke ĉiu ciklo de la hazarda permuto X_t je la tempo t estas, kiel aro, subaro de koneksa komponanto de G_t. Estas do nature konsideri la ciklan faktorigon de la permuto **malvastigita al aparta koneksa komponanto** de G_t. Estu $\mathfrak{C}_t$ la plej granda komponanto de G_t (kiu estas makroskopa se $t \geq cn$ por iu $c > 1$, kaj enhavas ĉiujn verticojn kun alta probablo post la tempo τ_n). $\mathfrak{C}_t$ nomiĝas la giganta komponanto de G_t. Laŭ fama rezulto de Schramm [18], la distribuo de la longo de la plej longaj cikloj de X_t ene de $\mathfrak{C}_t$, normigita per la tuta grando $|\mathfrak{C}_t|$ de la giganta komponanto, strebas al distribuo de Poisson–Dirichlet (laŭ la senco de finidimensiaj distribuoj). Sekve ni povas vidi ke la plej longaj cikloj limese koincidas kun la distribuo de hazarda permuto en la giganta komponanto (vidu ekzemple [2]). Pli forta versio de la teoremo de Schramm estus la sekva (ankaŭ de Nathanaël Berestycki) :

Konjekto 1.3. Supozu ke $t \geq cn/2$ por iu $c > 1$. Por ĉiu $\mathfrak{C}_t$, la distribuo de $X_t|_{\mathfrak{C}_t}$ estas proksimume uniforma, en la senco ke $\mathrm{d_{TV}}(X_t|_{\mathfrak{C}_t}, U_{\mathfrak{C}_t}) \to 0$ probablece, kiam $n \to \infty$, kie $U_{\mathfrak{C}_t}$ almontras la uniforman permuton sur la giganta komponanto $\mathfrak{C}_t$.

Ne malfacilas montri ke la konjekto 1.3 implicas la konjekton 1.2. Efektive, la konjekto 1.3 tre precize priskribas la strukturon de X_t najbare de la miksotempo : se $t = \lfloor \frac{1}{2} n \log n + cn \rfloor$, tiam laŭ tiu konjekto, se $\tau_n > t$, X_t konsistus el proksimume uniforma permuto sur $n - 1$ punktoj, kaj unu kroma fiksopunkto ; kaj se $\tau_n \geq t$, X_t esence estus nedistingebla de hazarda permuto. Tia priskribo implicus ke

$$\mathrm{d_{TV}}(X_t, U_n) = \mathrm{d_{TV}}(\mathrm{Fix}(X_t), \mathrm{Poiss}(1)) + o(1),$$

kie $\mathrm{Fix}(X_t)$ estas la nombro de fikspunktoj de X_t. Krome, estas relative facile kontroli ke $\mathbb{P}(\tau_n > t) \to e^{-2c}$ kaj do, ankoraŭ supozante la konjekton 1.3, ni povus dedukti ke

$$\mathrm{d_{TV}}(X_t, U_n) = \mathrm{d_{TV}}(\mathrm{Poiss}(1 + e^{-2c}), \mathrm{Poiss}(1)) + o(1),$$

kie la kroma dekstroflanka termo e^{-2c} precize respondas al la probablo $\mathbb{P}(\tau_n > t)$. Tiu lasta egalaĵo ekzakte estas nia teoremo 1.1.

Strukturo de la artikolo En la sekcio 2, ni prezentos la plibonigon de la superbara lemo de Diaconis, uzante la nekomutecan transformon de Fourier, kiu rekondukas nin al grupreprezentoj. En la sekcio 3, ni faros kelkajn rememorigojn pri la grupreprezentoj de la simetria grupo, ni montros precizajn estimojn de la kombinatorikaj formuloj hoklonga kaj de Murnagham-Nakayama kiam la grando n de niaj dispartigoj strebas al infinito dum $n - \lambda_1$ restas konstanta, kaj ni pruvos kelkajn superbarojn kiuj poste utilos. En la sekcio 4, ni pruvos la eldiritan teoremon, aproksimaĵo post aproksimaĵo. En la tuta sekvo, k neambigue almontros la entjeron

$$k = k(n, c) = \left\lfloor \frac{1}{2} n \log(n) + cn \right\rfloor .$$

Ideo de la pruvo La algebraj objektoj $\widehat{\mathfrak{S}_n}, \mathrm{triv}, d_\lambda, s_\lambda$ kaj ch^λ estos difinitaj je la komenco de la sekcio 2. Por ĉiu $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{Fix}(\sigma)$ almontros la nombron de fikspunktoj de la permuto σ. Por $j \in \mathbb{N}^*$, ni difinas la polinomon $T_j(z)$ per la formulo $\sum_{i=0}^{j} \binom{z}{j-i} \frac{(-1)^i}{i!}$. La ideo estas unue fiksi reelon $c \in \mathbb{R}$, kaj poste difini por ĉiu $\epsilon > 0$ entjeron $M = M(c, \epsilon)$ tia ke kiam n strebas al infinito, ĉiuj sekvaj aproksimaĵoj veru je ϵ.
Reskribante la sumon dank' al la transformo de Fourier kaj la plibonigon de la lemo de Diaconis,

$$\mathrm{d}_1\left(P_n^{*k}, U_n\right) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n} \setminus \{\mathrm{triv}\}} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \approx \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda_1 \geq n-M} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| .$$

Poste, pro la lemo de polinoma konverĝo kaj lasante $M \to \infty$, ni obtenos

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda_1 \geq n-M} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \approx \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{M} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| \approx \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| .$$

Fine, strebigante n al infinito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| e^{-e^{-2c}} \left(1 + e^{-2c}\right)^{\mathrm{Fix}(\sigma)} - 1 \right| \\ &\approx \mathbb{E} \left| e^{-e^{-2c}} \left(1 + e^{-2c}\right)^{\mathrm{Poiss}(1)} - 1 \right| \\ &= \mathrm{d}_1\left(\mathrm{Poiss}\left(1 + e^{-2c}\right), \mathrm{Poiss}(1)\right) . \end{aligned}$$

2 Plibonigo de la superbara lemo de Diaconis

En tiu sekcio ni prezentas la plibonigon de la superbara lemo de Diaconis. Ni metiĝos en la kadro de finiaj grupoj, sed tiu lemo povas senprobleme esti uzata en pli ĝenerala kadro, por kompaktaj grupoj ekzemple. Nia celo estas obteni pli bonan aproksimaĵon ol en [8], sen uzi Cauchy-Schwarz antaŭ ol Fourier.
Estu G finia grupo, $\mathbb{C}G$ la algebro de la grupo G kaj $\widehat{G}$ la aro de la nereduktebla reprezentoj de G. Ni notaciu triv la trivialan reprezenton de G kaj $\widehat{G}^* = \widehat{G} \setminus \{\mathrm{triv}\}$. Por

$\alpha \in \widehat{G}$, Ni ankaŭ notaciu ρ_α la matricon de la reprezento α, ch^α ĝia karaktero kaj d_α ĝia dimensio. Ni unue rememorigu la inversan formulon por la nekomuteca transformo de Fourier, bone klarigita en [16]. Por $f : G \to \mathbb{C}$ kaj $g \in G$, ni havas

$$f(g) = \sum_{\alpha \in \widehat{G}} \frac{d_\alpha}{|G|} \mathrm{Tr}(\rho^\alpha(g)^* \widehat{f}(\alpha)).$$

Ni deduktas el tio ke por ĉiu $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1\left(P^{*t}, U\right) &= \sum_{g \in G} \left|P^{*t}(g) - U(g)\right| \\ &= \sum_{g \in G} \left| \sum_{\alpha \in \widehat{G}} \frac{d_\alpha}{|G|} \mathrm{Tr}((\widehat{P^{*t} - U})(\alpha)\rho^\alpha(g)^*) \right| \\ &= \sum_{g \in G} \left| \sum_{\alpha \in \widehat{G}^*} \frac{d_\alpha}{|G|} \mathrm{Tr}(\widehat{P^{*t}}(\alpha)\rho^\alpha(g)^*) \right|. \end{aligned}$$

Aldone, ĉar P estas funkcio konstanta sur ĉiu konjugklaso, ni scias per la lemo de Schur ke por ĉiu α, $\widehat{P}(\alpha)$ estas homotetio, kun rilato $s_\alpha = \frac{\mathrm{Tr}(\widehat{P}(\alpha))}{d_\alpha}$. Ni do obtenas ke :

$$\mathrm{d}_1\left(P^{*t}, U\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left| \sum_{\alpha \in \widehat{G}^*} d_\alpha s_\alpha^t \overline{\mathrm{ch}^\alpha(g)} \right|.$$

Nun, se anstataŭ havi unu grupon G, ni havas kreskantan vicon de grupoj $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ĉiu grupo garnita per probablo P_n, kaj se $t = t(n)$ estas bone elektita tempo kiu dependas je n (kaj eventuale je aliaj parametroj), ni strebigemos n al infinito ene de niaj sumoj, por tiel obteni konverĝon al eksplicita formulo kiu pruvos kutofon aŭ donos limesan profilon. La ideo de la sekva lemo estas lokalizi finian aron de neredukteblaj reprezentoj kiuj havos plejparton de la maso (asimptote), por povi aproksimi, uniforme je n, la sumon sur ĉiuj neredukteblaj reprezentoj per finia sumo, kaj poste ebli preni la limeson je n en la finiaj sumoj.

Lemo 2.1. (Aproksimaĵa lemo) Estu G finia grupo, P probablo sur G konstanta sur ĉiu konjugklaso, kaj $S \subset \widehat{G}^*$. Tiam :

$$\left| \mathrm{d}_1\left(P^{*t}, U\right) - \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left| \sum_{\alpha \in S} d_\alpha s_\alpha^t \overline{\mathrm{ch}^\alpha(g)} \right| \right| \leq \sum_{\alpha \in \widehat{G}^* \setminus S} d_\alpha \left|s_\alpha\right|^t.$$

Pruvo Uzante ke $\Big||a| - |b|\Big| \leq |a-b|$ kaj per triangulaj neegalaĵoj,

$$\begin{aligned}
&\left| \mathrm{d}_1\left(P^{*t}, U\right) - \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\sum_{\alpha\in S} d_\alpha s_\alpha^t \overline{\mathrm{ch}^\alpha(g)}\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\sum_{\alpha\in\widehat{G}\setminus S} d_\alpha s_\alpha^t \overline{\mathrm{ch}^\alpha(g)}\right| \\
&\leq \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\alpha\in\widehat{G}\setminus S} d_\alpha \left|s_\alpha\right|^t \left|\mathrm{ch}^\alpha(g)\right| \\
&= \sum_{\alpha\in\widehat{G}\setminus S} d_\alpha \left|s_\alpha\right|^t \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\mathrm{ch}^\alpha(g)\right|. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Nun, por ĉiu nereduktebla karaktero α, per la neegalaĵo de Cauchy-Schwarz kaj karaktera ortonormeco,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\mathrm{ch}^\alpha(g)\right| \leq \frac{1}{|G|}\sqrt{|G|\sum_{g\in G}\left|\mathrm{ch}^\alpha(g)\right|^2} = 1.$$

Injektante en $(*)$, tio konkludas la pruvon.

3 La simetria grupo kaj ĝiaj reprezentoj

3.1 Hoklonga formulo

Ni rememorigu kelkajn rezultojn el la teorio de la reprezentoj de la simetria grupo, reprezentoj kiujn ni nature indeksos per entjeraj dispartigoj, notaciitaj λ. En diagramo asociita al dispartigo, la hoklongo de iu ĉelo estas la nombro de ĉeloj situantaj supre aŭ dekstre de nia ĉelo. Ni notacios équ(λ) la produkton de la hoklongoj de la dispartigo λ. Ekzemple, jen la dispartigo $\lambda = (7,3,2,1,1)$ de la entjero 14 kaj ĝiaj hoklongoj :

1						
2						
4	1					
6	3	1				
11	8	6	4	3	2	1

.

En tiu kazo, ni havas :

$$\text{équ}(7,3,2,1,1) = 11\times8\times6\times(4\times3\times2\times1)\times(6\times3\times1\times4\times1\times2\times1) = 11\times8\times6\times4!\times\text{équ}(3,2,1,1).$$

Ni nun rememorigos la hoklongan formulo, kies pruvo troveblas en la ĉapitro 3 de [16].

Propozicio 3.1. (Hoklonga formulo) Se λ estas dispartigo de iu entjero n, tiam $d_\lambda = \frac{n!}{\text{équ}(\lambda)}$. Aparte, $d_{(n-j,\lambda_2,\lambda_3,\ldots)} \leq \binom{n}{j} d_{(\lambda_2,\lambda_3,\ldots)}$.

Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...)$ estas dispartigo, ni notacios λ^* la tranĉitan dispartigon $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, ...)$, en kiu la plej longa linio estis tranĉita. Ekzemple, se $\lambda = (n-7, 3, 2, 1, 1)$, $\lambda^* = (3, 2, 1, 1)$ kaj tiukaze ni havas kiam $n \to \infty$,

$$d_\lambda = \frac{n!}{(n-7+4)(n-8+2)(n-9+1)(n-10)!} \frac{1}{\text{équ}(\lambda^*)} = \frac{n!}{(n-7)!\,\text{équ}(\lambda^*)} \left(1 - \frac{7}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Tio facile ĝeneraliĝas por doni la sekvan asimptotan formulon :

Propozicio 3.2. (Asimptota hoklonga formulo) Estu $j \geq 1$ kaj $\lambda_2, \lambda_3, ...$ fiksitaj entjeroj tiaj ke $\lambda_2 + \lambda_3 + ... = j$. Tiam, kiam $n \to \infty$,

$$d_{(n-j,\lambda_2,\lambda_3,...)} = \binom{n}{j} d_{(\lambda_2,\lambda_3,...)} \left(1 - \frac{j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Pruvo Estu $n \in \mathbb{N}^*$ kaj $\lambda = \lambda(n) = (n-j, \lambda_2, \lambda_3, ...)$. Tiam, kiam $n \to \infty$, notaciante $\lambda^{*'}$ la konjugitan dispartigon de la dispartigo $\lambda^* = (\lambda_2, \lambda_3, ...)$,

$$\begin{aligned}
d_{(n-j,\lambda_2,\lambda_3,...)} &= \frac{n!}{(n-j+\lambda_1^{*'})(n-j-1+\lambda_2^{*'})...(n-2j+1+\lambda_j^{*'})} \frac{1}{\text{équ}(\lambda_2,\lambda_3,...)} \\
&= \frac{n!}{(n-j)!\,\text{équ}(\lambda_2,\lambda_3,...)} \frac{n-j}{n-j+\lambda_1^{*'}} \frac{n-j-1}{n-j-1+\lambda_2^{*'}} \cdots \frac{n-2j+1}{n-2j+1+\lambda_j^{*'}} \\
&= \frac{n!}{(n-j)!\,\text{équ}(\lambda_2,\lambda_3,...)} \left(1 - \frac{\lambda_1^{*'}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) ... \left(1 - \frac{\lambda_j^{*'}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \binom{n}{j} d_{(\lambda_2,\lambda_3,...)} \left(1 - \frac{j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Rimarko 3.3. Ni fakte nur bezonos la ekvivalenton, sed la termo kun $-\frac{j}{n}$ ebligas akiri pli bonan intuon pri la karakteraj rilatoj prezentotaj en la sekva subsekcio.

3.2 Karakteraj rilatoj

Estu τ 2-ciklo. Ni difinas, kiel en [8] la karakteran rilaton $r(\lambda) = \frac{\text{ch}^\lambda(\tau)}{d_\lambda}$. Eblas doni diversajn eksplicitajn formulojn por tiu objekto, inter kiuj la sekvan, simetrian, kiu elsekvas el la lemo 7.14 en [16].
Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ estas dispartigo de la entjero n, tiam ni havas :

$$r(\lambda) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} \binom{\lambda_i}{2} - \binom{\lambda_i'}{2}.$$

La modifita karaktera rilato, difinita en la sekcio 2, skribiĝas $s_\lambda = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} r(\lambda)$ kaj ni enkalkulas ke ni elektas la identecon kun probablo $1/n$. La superbaroj de la sekva propozicio elvenas el [7].

Propozicio 3.4. Se λ estas dispartigo de la entjero n, tiam

$$s_\lambda \leq \frac{\lambda_1}{n} \quad \text{kaj} \quad |r(\lambda)| \leq \frac{\lambda_1}{n}.$$

Se plie $\lambda_1 \geq \frac{n}{2}$, tiam

$$s_\lambda \leq 1 - \frac{2(\lambda_1+1)(n-\lambda_1)}{n^2}.$$

Ni ankaŭ bezonos asimptotan disvolviĝon de s_λ, facile akireblan dank' al la eksplicita formulo de $r(\lambda)$: Se $j \in \mathbb{N}^*$ kaj $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_r$ estas pozitivaj entjeroj tiaj ke $\lambda_2 + ... + \lambda_r = j$, tiam, kiam $n \to \infty$,

$$r(n-j, \lambda_2, ..., \lambda_r) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \left(\binom{n-j}{2} + O(1) \right) = 1 - \frac{2j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

kaj do

$$s_\lambda = 1 - \frac{2j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Rimarko 3.5. En la ĝenerala kazo, por diveni kutofon, ni deziras trovi $t = t(n)$ por kiu $d_\alpha \left|s_\alpha\right|^t = \theta(1)$ kiam $n \to \infty$, por la reprezentoj α kiuj havas la plej grandan mason. En la kazo de la simetria grupo, ĉar $d_\lambda \approx n^j$, ni volas trovi t tia ke $\left|s_\lambda\right|^t \approx n^{-j}$. Ekzemple, por la hazardaj 2-cikloj, estas tre nature antaŭvidi kutofon je $\frac{1}{2} n \log(n)$, el la formulo de s_λ, ĉar $\left(1 - \frac{2j}{n}\right)^{\frac{1}{2} n \log(n)} \approx n^{-j}$.

3.3 Transigo de maso en la grafeo de Young

Estos praktike uzi la formalismon de la grafeo de Young por iuj kalkuloj. Ni tie studos, en la grafeo de Young, transigon de mezuro de unu linio al la sekva, kiu povas esti indukte etendita al pluraj linioj. Ni skribos $\lambda \vdash m$ por iu $m \geq 1$ por indiki ke λ estas dispartigo de la entjero m. Ni ankaŭ skribos $\lambda \nearrow \Lambda$ se $\lambda \vdash m$ kaj $\Lambda \vdash m+1$ por diri ke la diagramo de Λ obteniĝas el la diagramo de λ per aldono de unu ĉelo. Ni fiksu entjeron $j \geq 1$. Ni rememoras la transigan formulon por la dimensio de diagramoj, formulo kiu troveblas en [11] aŭ [16] : se ni fiksas $\lambda \vdash j$, tiam ni havas la sekvan transigon, kiu povas esti sendepende interesa :

$$\sum_{\Lambda \,:\, \lambda \nearrow \Lambda} d_\Lambda = (j+1) d_\lambda.$$

Estu j entjero kaj $(\gamma_\lambda)_{\lambda \vdash j}$ vico de reeloj. Ni vastigas tiun linion al la sekva, $j+1$ tiel, sekvante la edĝojn de la grafeo : se $\Lambda \vdash j+1$, ni metas $\gamma_\Lambda = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} \gamma_\lambda$. Tiam ni havas la transigon :

Propozicio 3.6.

$$\sum_{\Lambda \vdash j+1} \gamma_\Lambda d_\Lambda = (j+1) \sum_{\lambda \vdash j} \gamma_\lambda d_\lambda.$$

Pruvo

$$\begin{aligned}
\sum_{\Lambda\vdash j+1}\gamma_\Lambda d_\Lambda &= \sum_{\Lambda\vdash j+1}\left(\sum_{\lambda\,:\,\lambda\nearrow\Lambda}\gamma_\lambda\right)d_\Lambda \\
&= \sum_{\lambda\vdash j}\sum_{\Lambda\vdash j+1}\mathbf{1}_{\lambda\nearrow\Lambda}\gamma_\lambda d_\Lambda \\
&= \sum_{\lambda\vdash j}\gamma_\lambda\sum_{\Lambda\,:\,\lambda\nearrow\Lambda}d_\Lambda \\
&= (j+1)\sum_{\lambda\vdash j}\gamma_\lambda d_\lambda.
\end{aligned}$$

3.4 Permutoj ĝenerale ne havas nur mallongajn ciklojn

Ni metas, por $n\in\mathbb{N}^*$ kaj $1\le j\le n$,

$$\mathfrak{S}_{n,j}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \text{ĉiuj cikloj de } \sigma \text{ havas longon} \le j\}\,.$$

Ni pruvu ke se j fiksitas, $\mathfrak{S}_{n,j}$ estas asimptote multe pli malgranda ol $\mathfrak{S}_n$.

Propozicio 3.7. Estu $j\ge 2$ fiksita entjero. Tiam por n sufiĉe granda,

$$\log\left(\frac{|\mathfrak{S}_{n,j}|}{|\mathfrak{S}_n|}\right)\le\frac{-n\log(n)}{T(j)},$$

kie $T(j)=1+2+...+j$.

Pruvo Ni povas vidi ke en $\mathfrak{S}_{n,j}$, estas maksimume $(n+1)^j$ konjugklasoj, ĉar klaso estas determinita per la nombro de fiksaj punktoj, de 2-cikloj,..., de j-cikloj de iu reprezentanto, ĉiuj necese inter 0 kaj n. Ni superbaru la kardinalon de la konjugklasoj. Estu $n\ge j$ granda entjero, $\mu=(\mu_1,...,\mu_r)$ dispartigo de la entjero n tia ke $\mu_1\le j$ kaj $\mu_r\ge 1$, kaj $\mathcal{C}_\mu$ la asociita konjugklaso. Tiam, se k_q almontras la nombron de μ_i egalaj al q, ni havas por n sufiĉe granda :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_\mu| &= \frac{n!}{2^{k_2}3^{k_3}...j^{k_j}k_2!k_3!...k_j!(n-2k_2-3k_3-...-jk_j)!} \\
&\le \frac{n!}{k_2!k_3!...k_j!(n-2k_2-3k_3-...-jk_j)!} \\
&= \binom{n}{(2k_2,...,jk_j,(n-2k_2-...-jk_j))}\frac{(2k_2)!}{k_2!}...\frac{(jk_j)!}{k_j!}. \\
&\le \binom{n}{(\frac{n}{j},\frac{n}{j},...,\frac{n}{j})}\frac{(2k_2)!}{k_2!}...\frac{(jk_j)!}{k_j!}. \\
&\le j^n\frac{(2k_2)!}{k_2!}...\frac{(jk_j)!}{k_j!}.
\end{aligned}$$

Aldone, tiu lasta produkto estas pli granda se la k_i pligrandiĝas, do ni povas supozi sen limigo de ĝeneraleco ke $2k_2 + ... + jk_j \geq n-1$. Tiam, iu el la k_i necese havas kardinalon pli grandan ol $\frac{n-1}{2+3+...+j} = \frac{n-1}{T(j)-1}$. Ĉar cetere $(2k_2)!...(jk_j)! \leq n!$, ni obtenas :

$$|\mathcal{C}_\mu| \leq j^n \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{T(j)-1}\right)!}.$$

Fine, por n sufiĉe granda,

$$\frac{|\mathfrak{S}_{n,j}|}{|\mathfrak{S}_n|} \leq (n+1)^j j^n \frac{1}{\left(\frac{n-1}{T(j)-1}\right)!},$$

t.e.

$$\log\left(\frac{|\mathfrak{S}_{n,j}|}{|\mathfrak{S}_n|}\right) \leq j\log(n+1) + n\log(j) - \log\left(\left(\frac{n-1}{T(j)-1}\right)!\right) \sim -\frac{n\log(n)}{T(j)-1}.$$

Ĉar $T(j)-1 < T(j)$, tio pruvas la deziritan superbaron.

Rimarko 3.8. Tiu superbaro aparte pruvas ke la rilato $\frac{|\mathfrak{S}_{n,j}|}{|\mathfrak{S}_n|}$ strebas al 0, eĉ obligita per ajna potenca funkcio, aŭ polinomo. Estas tio kion ni uzos poste. La kazo $j=1$, kiun ni ne traktis, estas triviala ĉar $|\mathfrak{S}_{n,1}| = 1$.
Aldone, se ni superbarus pli sagace, ni povus montri ke $k_j \sim \frac{n}{j}$ maksimumigas la pezajn termojn de la konjugklasa kardinalo, kaj do ke $\log(|\mathfrak{S}_{n,j}|) \sim \left(1-\frac{1}{j}\right) n\log(n)$.

3.5 Superbaro de la nombro de q-cikloj

Estu, por ĉiu permuto $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ kaj entjero $q \in \mathbb{N}^*$, $N_q(\sigma) = N_q^{(n)}(\sigma)$ la nombro de q-cikloj en la cikla faktorigo de σ. Ni rememorigu la bone konatan leĝon de la nombro de fiksaj punktoj de hazarda permuto[5]

$$\mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_1(\sigma) = m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{n-m} \frac{(-1)^i}{i!}\ ,\ 0 \leq m \leq n.$$

Ni aparte deduktas ke por ĉiu $0 \leq m \leq n$, $\mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_1(\sigma) = m) \leq \frac{1}{m!}$. Ni ĝeneraligu tiun superbaron al la nombro de q-cikloj.

Propozicio 3.9. Estu $q, m \in \mathbb{N}^*$, tiam

$$\mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_q(\sigma) = m) \leq \frac{1}{q^m m!}.$$

[5]Por $m=0$, ni alplikas la inklud-ekskludan principon al $\bigcup_{i=1}^n F_i$, kie $F_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i\}$, kaj poste ni ĝeneraligas al ajna m.

Pruvo Kiel en la antaŭa paragrafo, se μ_i estas dispartigo de la entjero n, k_q almontras la nombron de μ_i egalaj al q.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_q(\sigma) = m) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\mu \vdash n \\ k_q = m}} |C_\mu| \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_r \geq 1) \vdash n \\ k_q = m}} \frac{1}{2^{k_2} 3^{k_3} \ldots r^{k_r} k_2! k_3! \ldots k_r! (n - 2k_2 - 3k_3 - \ldots - rk_r)!} \\
&= \frac{1}{q^m m!} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_r \geq 1) \vdash n-qm \\ k_q = 0}} \frac{1}{2^{k_2} 3^{k_3} \ldots r^{k_r} k_2! k_3! \ldots k_r! (n - 2k_2 - 3k_3 - \ldots - rk_r)!} \\
&\leq \frac{1}{q^m m!} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_r \geq 1) \vdash n-qm} \frac{1}{2^{k_2} 3^{k_3} \ldots r^{k_r} k_2! k_3! \ldots k_r! (n - 2k_2 - 3k_3 - \ldots - rk_r)!} \\
&= \frac{1}{q^m m!} \mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_{n-qm} : N_q(\sigma) = 0) \\
&\leq \frac{1}{q^m m!}.
\end{aligned}$$

4 Pruvo de la teoremo 1.1

Por tiu tuta sekcio, ni fiksas $c \in \mathbb{R}$. Ni rememorigas ke $k = k(n, c) = \left\lfloor \frac{1}{2} n \log(n) + cn \right\rfloor$.

4.1 Superbaro de la ekarto

Tiu superbaro similas al la superbaro de la sumo kiu aperas en [7] post apliki la superbaran lemon de Diaconis. Tamen, ĉar ni volas pli precizan rezulton, ni devas solvi kelkajn pliajn teknikajn malfacilaĵojn, interalie pro tio ke c povas esti negativa.

Ni povas observi ke la reprezentoj de la simetria grupo kiuj havas grandan pezon en la sumo

$$\mathrm{d}_1\left(P_n^{*k}, U_n\right) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}^*} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right|$$

respondas al dispartigoj kiuj havas tre longan unuan linion. Ni do nature tranĉos laŭ λ_1. Ni metu, por ĉiu $M \in \mathbb{N}^*$ kaj entjero n sufiĉe granda,

$$S_M(n) = \left\{ \lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}^* : \lambda_1 \geq n - M \right\}.$$

Laŭ la lemo 2.1, por ĉiu $M \geq 1$,

$$\left| \mathrm{d}_1\left(P_n^{*k}, U_n\right) - \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda \in S_M(n)} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \right| \leq \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n} \,;\, \lambda_1 < n-M} d_\lambda \left| s_\lambda \right|^k.$$

Ni daŭre devas montri ke la dekstraĵo de tiu neegalaĵo strebas al 0 uniforme je n kiam $M \to \infty$, kaj estimi la duan termon de la maldekstraĵo. Ni komence superbaru la dekstraĵon.

Lemo 4.1. (Superbaro de la restoj)
Por ĉiu $\epsilon > 0$ ekzistas $M = M(c, \epsilon) \geq 1$ kaj $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ tiaj ke se $n \geq n_0$, tiam

$$\sum_{\lambda_1 \leq n-M} d_\lambda |s_\lambda|^k \leq \epsilon.$$

Pruvo Ni rememorigas ke $s_\lambda = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} r(\lambda)$. Observu ke se λ estas dispartigo de n tia ke $r(\lambda) \geq 0$, tiam $r(\lambda') = -r(\lambda)$ kaj do $s_\lambda = |s_\lambda| \geq |s_{\lambda'}|$. Ni unue superbaru $\sum_{\lambda_1 \leq n-1} d_\lambda |s_\lambda|^k$ tranĉante la sumon ere. Notu ke $\lambda_1 = n$ respondas al $r(\lambda) = 1$, t.e. al $\lambda = (n)$, la triviala reprezento, kiu malaperis kiam ni aplikis la transformon de Fourier. Same, $r(\lambda) = -1$ respondas al $\lambda = (1^n)$.

$$\begin{aligned}\sum_{r(\lambda)<1} d_\lambda |s_\lambda|^k &= d_{(1^n)} \left|s_{(1^n)}\right|^k + \sum_{-1<r(\lambda)\leq -\frac{2}{n}} d_\lambda |s_\lambda|^k + \sum_{-\frac{2}{n}<r(\lambda)<\frac{2}{n}} d_\lambda |s_\lambda|^k + \sum_{\frac{2}{n}\leq r(\lambda)<1} d_\lambda |s_\lambda|^k \\ &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4.\end{aligned}$$

Ni superbaru tiujn diversajn erojn aparte. La unua estas la plej facila :

$$S_1 = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\left\lfloor \frac{1}{2} n \log(n) + cn \right\rfloor} = o(1),$$

$$S_3 \leq \sum_{-\frac{2}{n}<r(\lambda)<\frac{2}{n}} d_\lambda \left(\frac{3}{n}\right)^k \leq \left(\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}^*} d_\lambda^2\right) \left(\frac{3}{n}\right)^k \leq n! \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2} n \log(n) + cn} = o(1),$$

$$S_2 = \sum_{\frac{2}{n}\leq r(\lambda)<1} d_\lambda \left(|s_\lambda| - \frac{2}{n}\right)^k \leq \sum_{\frac{2}{n}\leq r(\lambda)<1} d_\lambda |s_\lambda|^k \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \leq e^{-\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2} n \log(n) + cn\right)} S_4 = \frac{e^{-2c}}{n} S_4,$$

kie ni uzis en la superbaro de S_2 ke $|s_\lambda| \leq 1$. Se ni sukcesas montri ke S_4 estas barita (je n), tiam ni povos konkludi ke $\sum_{r(\lambda)<1} d_\lambda |s_\lambda|^k$ esta barita (je n). Ni superbaros sumon iom pli grandan ol S_4, nome $\sum_{0\leq r(\lambda)<1} d_\lambda |s_\lambda|^k$. Ni komencu per eta superbaro kiu utilos en la sekvo. Se $1 \leq j \leq n$, ni havas

$$\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda \leq \sum_{\lambda^* \vdash j} \binom{n}{j} d_{\lambda^*} \leq \binom{n}{j} \sqrt{\left(\sum_{\lambda^* \vdash j} 1^2\right)\left(\sum_{\lambda^* \vdash j} d_{\lambda^*}^2\right)} \leq \frac{n^j}{j!} \sqrt{2^j j!} \leq \frac{n^j 2^{j/2}}{\sqrt{j!}}, \qquad (**)$$

kie la du unuaj linioj elsekvas el la propozicio 3.1 kaj el la neegalaĵo de Cauchy-Schwarz, kaj la antaŭlasta neegalaĵo venas el la fakto ke ĉiu dispartigo de entjero j povas esti vidita kiel unu el la 2^j subaroj de la aro kun j elementoj. Ni do havas, laŭ la propozicio 3.4

(notu ke $r(\lambda) \geq 0$ implicas ke $s(\lambda) > 0$)

$$
\begin{aligned}
S_4 &\leq \sum_{0 \leq r(\lambda) < 1} d_\lambda s_\lambda^k \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{\lambda_1 = n-j \\ 0 \leq r(\lambda) < 1}} d_\lambda s_\lambda^k \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n/1000 \rfloor} \left(\sum_{\lambda_1 = n-j} d_\lambda \right) \left(1 - \frac{2j(n-j+1)}{n^2} \right)^k + \sum_{j=\lfloor n/1000 \rfloor + 1}^{n-1} \left(\sum_{\lambda_1 = n-j} d_\lambda \right) \left(1 - \frac{j}{n} \right)^k \\
&= A_1 + A_2.
\end{aligned}
$$

Ni superbaru A_1. Ni havas, uzante $(**)$ kaj $1 + x \leq \exp x$,

$$
\begin{aligned}
A_1 &\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n/1000 \rfloor} \frac{n^j 2^{j/2}}{\sqrt{j!}} \left(1 - \frac{2j(n-j+1)}{n^2} \right)^k \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n/1000 \rfloor} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{j!}} e^{j \log(n)} e^{-\frac{2j(n-j+1)}{n^2} \left(\frac{1}{2} n \log(n) + cn \right)} \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor n/1000 \rfloor} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{j!}} e^{j \log(n)} e^{-j \left(1 - \frac{j-1}{n} \right) (\log(n) + 2c)} \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor n/1000 \rfloor} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{j!}} e^{-2jc} e^{j(j-1) \frac{\log(n) + 2c}{n}}.
\end{aligned}
$$

Estu $a_j(n)$ la enhavo de la sumo en la dekstraĵo, kaj ni rimarku ke

$$
\frac{a_{j+1}(n)}{a_j(n)} = \frac{e^{\frac{\log(2)}{2} - 2c}}{\sqrt{j+1}} e^{2j \frac{\log(n) + 2c}{n}}.
$$

Kiel funkcio de j kiam n fiksitas, ĝi malkreskas ĝis $j = \frac{n}{4(\log(n)+2c)}$, kaj kreskas poste. Se la unua kaj lasta rilatoj estas strikte malpli grandaj ol 1, tiam ni havos subgeometrian sumon, kiu do estos barita. La lasta rilato, ĉe $\frac{n}{1000}$, valoras

$$
\sqrt{1000} e^{\frac{\log(2)}{2} - 2c + \frac{4c}{1000}} n^{\frac{2}{1000} - \frac{1}{2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.
$$

Por la unua rilato, ni devas atenti iom pli. Ĉe $j = 1$, la rilato povas esti multe pli granda ol 1, des pli ke c estas malgranda (t.e. negativa kun granda modulo). Ni do devos tranĉi lastafoje, kaj konsideri la sumon ekde taŭga M, dependa je c sed ne je n. Tiel, kvankam la konverĝo estas rapida en la kazo en kiu c pozitivas, kazo jam traktita de Diaconis kaj Shahshahani, se c estas tre negativa, necesos konsideri multegajn termojn kaj la konverĝo estos multe pli malrapida. Estu M tia ke

$$
\frac{e^{\frac{\log(2)}{2} - 2c}}{\sqrt{M+1}} \leq \frac{1}{4},
$$

kaj n tiom granda, ke

$$e^{2M\frac{\log(n)+2c}{n}} \leq 2,$$

kaj ke la rilato $\frac{a_{j+1}(n)}{a_j(n)}$ ĉe $j = n/1000$ estu malpli granda ol $1/2$. Tiam, ĉar ĉiuj rilatoj ekde $j = M$ estas malpli grandaj ol $1/2$, ni havas :

$$\sum_{j=1}^{n/1000} a_j(n) \leq \sum_{j=1}^{M} a_j(n) + a_M(n) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{j=1}^{M} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{j!}} e^{-2jc} + \frac{2^{M/2}}{\sqrt{M!}} e^{-2Mc}.$$

Tiel, ĉar $c \in \mathbb{R}$ fiksitas, A_1 estas barita uniforme je n. Ni ekzorgu pri A_2, estos pli facile kaj agrable.

Ni observas ke por ĉiu $j \geq 0$, $j^j \leq j!3^j$, kaj do, per $(**)$,

$$\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda \leq \frac{n^j 6^{j/2}}{j^{j/2}}.$$

Estu j inter $n/1000$ kaj $n-1$. Tiam

$$\begin{aligned}
\frac{n^j 6^{j/2}}{j^{j/2}} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^k &= \frac{n^j 6^{j/2}}{j^{j/2}} e^{k \log\left(1-\frac{j}{n}\right)} \\
&\leq \frac{n^j 6^{j/2}}{j^{j/2}} e^{-k\left(\frac{j}{n}+\frac{j^2}{2n^2}\right)} \\
&\leq \frac{n^j 6^{j/2}}{j^{j/2}} e^{-(\frac{1}{2}\log(n)+c)\left(j+\frac{n}{2\cdot 10^6}\right)} \\
&= 6^{j/2} e^{\frac{j}{2}\log\left(\frac{n}{j}\right)} e^{-c\left(j+\frac{n}{2\cdot 10^6}\right)} e^{-\frac{1}{4\cdot 10^6} n \log(n)} \\
&\leq 6^{j/2} e^{\frac{j}{2}\log(1000)} e^{|c|\left(j+\frac{n}{2\cdot 10^6}\right)} e^{-\frac{1}{4\cdot 10^6} n \log(n)} \\
&\leq e^{n\frac{\log(6)}{2}} e^{n\log(1000)} e^{|c|\left(n+\frac{n}{2\cdot 10^6}\right)} e^{-\frac{1}{4\cdot 10^6} n \log(n)} \\
&= e^{Kn - K' n \log(n)},
\end{aligned}$$

kie K estas reela konstanto kaj K' estas konstanto strikte pozitiva. Tiel,

$$A_2 \leq n e^{Kn-K'n\log(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nun eblas konkludi, uzante la superbarojn de la pruvo por A_1.
Estu $\epsilon > 0$. Estu $M = M(c, \epsilon) \geq 1$ tia ke $\frac{e^{\frac{\log(2)}{2}-2c}}{\sqrt{M+1}} \leq \frac{1}{4}$ kaj $2\frac{2^{M/2}}{\sqrt{M!}} e^{-2Mc} < \epsilon$. Tiam por n

sufiĉe granda,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_1 \le n-M} d_\lambda |s_\lambda|^k &\le S_1 + S_2 + S_3 + \sum_{j=M}^{n/1000} a_j(n) + A_2 \\ &\le \sum_{j=M}^{n/1000} a_j(n) + o(1) \\ &\le a_M(n) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} + o(1) \\ &\le 2\frac{2^{M/2}}{\sqrt{M!}} e^{-2Mc} + o(1) \\ &< \epsilon + o(1) \text{ as } n \to \infty.\end{aligned}$$

4.2 Lemo de polinoma konverĝo

Ni nun estimu la ĉefan termon.

Lemo 4.2. Estu $\ell \in \mathbb{N}^*$. Tiam, kiam $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\ell} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| + o(1),$$

kie ni rememorigas ke

$$T_j(z) = \sum_{i=0}^{j} \binom{z}{j-i} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Ni montru unuatempe kiel la polinomoj T_j, ŝlosil-elemento de la pruvo, aperas nature.

Lemo 4.3. Estu $j \in \mathbb{N}^*$ fiksita entjero, kaj $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permuto kiu havas almenaŭ unu ciklon pli longan ol[6] j (t.e. $\sigma \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{S}_{n,j}$). Tiam

$$\frac{1}{j!} \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} d_{\lambda^*} \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) = T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)).$$

Pruvo de la lemo 4.3 Tiu pruvo estas kombinatorika kaj forte baziĝas sur la formulo de Murnagham-Nakayama. Ni unue konsideru $\sigma \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{S}_{n,j}$ kiel argumenton en $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$ kaj rememorigu ke por ĉiu permuto σ kaj $q \in \mathbb{N}^*$, $N_q(\sigma)$ estas la nombro de q-cikloj en la cikla faktorigo de σ. Ekzemple, se $\lambda = (n-4, 1, 1, 1, 1)$ kaj σ havas ciklon pli longan ol 4, ni havas laŭ la formulo de Murnagham-Nakayama, kaj skribante N_i anstataŭ $N_i(\sigma)$,

$$\mathrm{ch}^\lambda(\sigma) = \binom{N_1}{4} + N_3 N_1 + \binom{N_2}{2} - N_4 - \left(\binom{N_1}{3} - N_2 N_1 + N_3\right) + \left(\binom{N_1}{2} - N_2\right) - N_1 + 1.$$

Ni povas observi ke $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$ estas polinomo en $N_1(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma), N_2(\sigma), ..., N_j(\sigma)$. La ŝlosila observaĵo estas ke ni povas ĉion kalkuli kiam ni prenas la sumon kun $\lambda_1 = j$ konstanta,

[6] Ni povus preni $\sigma \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{S}_{n,j-1}$.

kaj ke nia polinomo, kiu apriore havas j argumentojn, fakte estas nur unuargumenta polinomo, en $N_1(\sigma)$, la nombro de fiksaj punktoj de σ. Tio venas el la orteco de iuj karakteroj kaj de la transigo de maso (propozicio 3.6), kiuj igos ĉiujn aliajn termojn internuliĝi. Ni detalu iom pli.

Por la polinoma algebro $\mathbb{C}[z_1, z_2, ...]$, ni ne uzos la kanonan bazon generitan per la z_i^j, sed tiun generitan de la $\binom{z_i}{j}$, pli bone adaptitan tie.

Estu $\sigma \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{S}_{n,j}$. Se λ estas dispartigo de n tia ke $\lambda_1 = n - j$, tiam la koeficiento de $\binom{N_1(\sigma)}{j}$ en $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$ estas nature la nombro de manieroj plenigi la diagramon de Young de λ^* per ĉiuj entjeroj inter 1 kaj j, kun linia kaj kolumna kresko, t.e. la nombro de standardaj tableloj de λ^*, kiu valoras $d_{\lambda^*} = \mathrm{ch}^{\lambda^*}(Id)$.

Pli ĝenerale se $j_1, ..., j_r \in \mathbb{N}$ estas tiaj ke $j_1 + 2j_2 + ... + rj_r = j$, tiam la koeficiento de

$$\binom{N_1(\sigma)}{j_1}\binom{N_2(\sigma)}{j_2}...\binom{N_r(\sigma)}{j_r}$$

en $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$ estas

$$\mathrm{ch}^{\lambda^*}(r^{j_r}, ..., 2^{j_2}, 1^{j_1}).$$

Tiel, pro karaktera orteco, la koeficiento de $\binom{N_1(\sigma)}{j_1}\binom{N_2(\sigma)}{j_2}...\binom{N_r(\sigma)}{j_r}$ en la sumo

$$\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} d_{\lambda^*}\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$$

estas

$$\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} d_{\lambda^*}\mathrm{ch}^{\lambda^*}\left(r^{j_r}, ..., 2^{j_2}, 1^{j_1}\right) = \sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} \mathrm{ch}^{\lambda^*}(Id)\mathrm{ch}^{\lambda^*}\left(r^{j_r}, ..., 2^{j_2}, 1^{j_1}\right) = 0.$$

Per transigo de maso, ni ankaŭ povas observi ke por $1 \leq j' \leq j_1$, se σ havas almenaŭ j' fiksitaj punktoj (se ĝi havas malpli, la koeficiento nulas), la koeficiento de

$$\binom{N_1(\sigma)}{j_1 - j'}\binom{N_2(\sigma)}{j_2}...\binom{N_r(\sigma)}{j_r}$$

en la sumo

$$\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} d_{\lambda^*}\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$$

valoras $(-1)^{j'}$ foje $j(j-1)...(j-j'+1)$ la koeficienton de

$$\binom{N_2(\sigma)}{j_2}...\binom{N_r(\sigma)}{j_r}$$

en la sumo

$$\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_{n-j'}}\,:\,\lambda_1 = n-j+j'} d_{\lambda^*}\mathrm{ch}^\lambda(\sigma'),$$

kie σ' havas j' fiksitaj punktoj malpli ol σ, kaj sammulte da i-cikloj por ĉiu $i \geq 2$, koeficiento kiu nulas krom se $j_2 = ... = j_r = 0$, kazo en kiu ĝi valoras 1. Fine, ni ja montris ke

$$\frac{1}{j!}\sum_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}_n}\,:\,\lambda_1 = n-j} d_{\lambda^*}\mathrm{ch}^\lambda(\sigma) = \binom{N_1(\sigma)}{j} - \binom{N_1(\sigma)}{j-1} + \frac{1}{2}\binom{N_1(\sigma)}{j-2} + ... + \frac{(-1)^j}{j!} = T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)).$$

Pruvo de la lemo 4.2 Uzante ke $\Big||a|-|b|\Big| \leq |a-b|$ kaj la triangulan neegalaĵon,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left|\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right| - \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left|\sum_{j=1}^{\ell} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right|\right| \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left|\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) - \sum_{j=1}^{\ell} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right| \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sum_{j=1}^{\ell}\left|\left(\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right) - e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right|.
\end{aligned}$$

Ni nun duere tranĉu la sumon sur $\mathfrak{S}_n$, laŭ $\mathfrak{S}_{n,\ell}$ kaj $\mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{S}_{n,\ell}$, kaj superbaru ĉiu el tiuj du sumoj aparte. Ni komencu per la sumo sur $\mathfrak{S}_{n,\ell}$. Ĉar en nia sumo $0 \leq s_\lambda \leq 1$ kaj $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \leq d_\lambda$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\left|\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) - e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right| \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j}\left(d_\lambda s_\lambda^k \left|\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right| + \left|e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right|\right) \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j}\left(d_\lambda^2 + e^{-2jc}(\ell+1)n^\ell\right) \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j}\left(\left(\binom{n}{j} d_{\lambda^*}\right)^2 + e^{-2jc}(\ell+1)n^\ell\right) \\
\leq\ & K(\ell,c)n^{2\ell}\frac{|\mathfrak{S}_{n,\ell}|}{|\mathfrak{S}_n|} \qquad \text{uzante ke } \binom{n}{j} d_{\lambda^*} \leq \frac{n^j}{j!} d_{\lambda^*} \leq n^j \leq n^\ell \\
=\ & o(1),
\end{aligned}$$

kie $K(\ell,c)$ estas konstanto kiu nur dependas je l kaj c. Ni ektraktu la duan sumon, kiun ni reskribos uzante la lemon 4.3:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\backslash\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\left|\left(\sum_{\lambda_1=n-j} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right) - e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma))\right| \\
=\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\backslash\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\left|\sum_{\lambda_1=n-j}\left(d_\lambda s_\lambda^k - e^{-2jc}\frac{d_{\lambda^*}}{j!}\right)\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\backslash\mathfrak{S}_{n,\ell}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\lambda_1=n-j}\left|d_\lambda s_\lambda^k - e^{-2jc}\frac{d_{\lambda^*}}{j!}\right|\left|\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)\right|.
\end{aligned}$$

Ni observu ke

$$d_{(n-j,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)} s^k_{(n-j,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)} - e^{-2jc}\frac{d_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_r)}}{j!} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

por ĉiu $1 \leq j \leq \ell$ kaj ĉiu $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_r \geq 1$ tiaj ke $\lambda_2 + ... + \lambda_r = j$. (Notu ke estas finia nombro de tiaj termoj.) Ni tranĉu la dekstraĵon laŭ ĉu $\max(N_1(\sigma), ..., N_\ell(\sigma))$ estas pli aŭ malpli granda ol $n^{\frac{1}{2\ell}}$.
Unuaflanke,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n,\ell} \\ \max(N_1(\sigma),...,N_\ell(\sigma)) \leq n^{1/(2\ell)}}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} \left| d_\lambda s_\lambda^k - e^{-2jc} \frac{d_{\lambda^*}}{j!} \right| \left| \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n,\ell} \\ \max(N_1(\sigma),...,N_\ell(\sigma)) \leq n^{1/(2\ell)}}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} K(\ell, c) \max(N_1(\sigma), ..., N_\ell(\sigma))^\ell \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n,\ell} \\ \max(N_1(\sigma),...,N_\ell(\sigma)) \leq n^{1/(2\ell)}}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} O\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Duaflanke,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n,\ell} \\ \max(N_1(\sigma),...,N_\ell(\sigma)) > n^{\frac{1}{2\ell}}}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} \left| d_\lambda s_\lambda^k - e^{-2jc} \frac{d_{\lambda^*}}{j!} \right| \left| \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{S}_{n,\ell} \\ \max(N_1(\sigma),...,N_\ell(\sigma)) > n^{\frac{1}{2\ell}}}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\lambda_1 = n-j} O\left(\frac{1}{n}\right) K(\ell, c) \max(N_1(\sigma), ..., N_\ell(\sigma))^\ell \\
&\leq \mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : \max(N_1(\sigma), ..., N_\ell(\sigma)) > n^{\frac{1}{2\ell}}) O\left(\frac{1}{n}\right) O\left(n^\ell\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_i(\sigma) > n^{\frac{1}{2\ell}}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) O\left(n^\ell\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\left(n^{\frac{1}{2\ell}}\right)!}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) O\left(n^\ell\right) \qquad \text{laŭ la propozicio 3.9} \\
&= o(1).
\end{aligned}$$

4.3 Polinomoj kun alta grado estas neglektindaj

Lemo 4.4. Estu $\epsilon > 0$. Ekzistas $M_0 = M_0(\epsilon, c)$ tia ke por ĉiu $M \geq M_0$ kaj $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{M} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| \right| \leq \epsilon.$$

Pruvo Estu $M, n \in \mathbb{N}^*$. Tiam ni havas, uzante denove ke $\Big||a| - |b|\Big| \leq |a-b|$,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{M} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| \right| \\
&\leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(\mathrm{Fix}(\sigma)) \right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(\sigma \in \mathfrak{S}_n : N_1(\sigma) = r) \left| \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(r) \right| \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-2jc} \left| T_j(r) \right| \qquad \text{ankoraŭ pro la propozicio 3.9.}
\end{aligned}$$

Ni nun observu ke se $r \geq j$,

$$|T_j(r)| = \left| \sum_{i=0}^{j} \binom{r}{j-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \sum_{i=0}^{j} \binom{r}{j-i} \left| \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \sum_{i=0}^{j} \binom{r}{j-i} \leq 2^r,$$

kaj se $r \leq j$,

$$\frac{1}{r!} |T_j(r)| = \frac{1}{r!} \left| \sum_{i=j-r}^{j} \binom{r}{j-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{r!(j-r)!} \sum_{i=j-r}^{j} \binom{r}{j-i} \leq \frac{1}{\left(\left(\frac{j}{2}\right)!\right)^2} 2^r.$$

Ni do konkludas ke

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-2jc} |T_j(r)| \\
&= \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-2jc} \sum_{r=0}^{j} \frac{1}{r!} |T_j(r)| \; + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{r!} e^{-2jc} |T_j(r)| \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{e^{-2jc}}{\left(\left(\frac{j}{2}\right)!\right)^2} \sum_{r=0}^{j} 2^r \; + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{r!} e^{2r|c|} 2^r \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{e^{-2jc}}{\left(\left(\frac{j}{2}\right)!\right)^2} 2^{j+1} \; + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{1}{r!} e^{2r|c|} 2^r \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

kiam $M \to \infty$.

Antaŭ ol trakti la lastan aproksimaĵon, ni reskribu la nefinian sumon kiu estas en la absolutaj valoroj. Ni metu

$$f_c : x \mapsto e^{-e^{-2c}} \left(1 + e^{-2c}\right)^x - 1.$$

Propozicio 4.5.

Estu $N \in \mathbb{N}$. Tiam

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(N) = f_c(N).$$

Pruvo Sufiĉas ŝanĝi variablojn kaj interŝanĝi la du sumojn :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} T_j(N) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} e^{-2jc} \binom{N}{j-i} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} e^{-2jc} \binom{N}{i} \frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} e^{-2jc} \binom{N}{i} \frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \quad -1 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{N}{i} e^{-2ic} \sum_{j=i}^{\infty} e^{-2(j-i)c} \frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \quad -1 \\
&= \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} e^{-2ic} e^{-e^{-2c}} \quad -1 \\
&= e^{-e^{-2c}} \left(1 + e^{-2c}\right)^N - 1.
\end{aligned}
$$

4.4 Konkludo de la pruvo

Lemo 4.6. Kiam $n \to \infty$, ni havas :

$$
\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| f_c \left(N_1^{(n)}(\sigma) \right) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E} \left| f_c \left(\mathrm{Poiss}(1) \right) \right|,
$$

kie Poiss(1) almontras la leĝon de Poisson kun parametro 1.

Pruvo Ĉar faktorialoj kreskas multe pli rapide ol eksponencialoj, kaj do ol f_c, ni havas kiam $n \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E} \left| f_c \left(\mathrm{Poiss}(1) \right) \right| - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| f_c \left(N_1^{(n)}(\sigma) \right) \right| \right| \\
&= \left| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{r!} \left| f_c(r) \right| - \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!} \right) \left| f_c(r) \right| \right| \\
&= \left| \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left(\sum_{i=n-r+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right) \left| f_c(r) \right| + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{r!} \left| f_c(r) \right| \right| \\
&= o(1).
\end{aligned}
$$

Ni nun estas pretaj estimi ĉiujn niajn estimojn.

Pruvo de la teoremo 1.1 Estu $\epsilon > 0$ kaj M, n_0 tiaj ke por $n \geq n_0$, ĉiuj aproksimaĵoj estu validaj je ϵ. Estu $n \geq n_0$.

Laŭ la lemoj 2.1 kaj 4.1,

$$\left| \mathrm{d}_1 \left(P_n^{*k}, U_n\right) \; - \; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda_1 \geq n-M} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \right| \leq \epsilon.$$

Laŭ la lemo 4.2,

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{\lambda_1 \geq n-M} d_\lambda s_\lambda^k \mathrm{ch}^\lambda(\sigma) \right| \; - \; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{M} e^{-2jc} P_j(N_1(\sigma)) \right| \right| \leq \epsilon.$$

Laŭ la lemo 4.4,

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{M} e^{-2jc} P_j(N_1(\sigma)) \right| \; - \; \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} P_j(N_1(\sigma)) \right| \right| \leq \epsilon.$$

Laŭ la lemo 4.6,

$$\left| \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2jc} P_j(N_1(\sigma)) \right| \; - \; \mathbb{E} \left| f_c(\mathrm{Poiss}(1)) \right| \right| \leq \epsilon.$$

Konsekvence, per triangulaj neegalaĵoj,

$$\left| \mathrm{d}_1 \left(P_n^{*k}, U_n\right) \; - \; \mathbb{E} \left| f_c(\mathrm{Poiss}(1)) \right| \right| \leq 4\epsilon.$$

Tiel, ni pruvis ke por ĉiu $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}_1 \left(P_n^{*k}, U_n\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E} \left| f_c(\mathrm{Poiss}(1)) \right|.$$

Por konkludi, ni reskribu tiun ekspekton laŭ la natura formo de la eldiro :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| f_c(\mathrm{Poiss}(1)) \right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{r!} \left| e^{-e^{-2c}} \left(1 + e^{-2c}\right)^r - 1 \right| \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \left| \frac{\left(e^{1+e^{-2c}}\right)^{-1}}{r!} \left(1 + e^{-2c}\right)^r - \frac{e^{-1}}{r!} 1^r \right| \\
&= \mathrm{d}_1 \left(\mathrm{Poiss}\left(1 + e^{-2c}\right), \mathrm{Poiss}(1)\right),
\end{aligned}$$

kaj tio kompletas la pruvon de la teoremo 1.1.

Dankoj Mi ŝatus dankegi mian eksprofesoron Justin Salez, dank' al kiu mi malkovris miksotemojn kaj kiu tre bone zorgis pri mi dum mia magistra tezo. Mi ŝatus danki ankaŭ Nathanaël Berestycki pro lia gastamo kiam li invitis min al la universitato de Vieno, kaj pro liaj atentaj relegoj kaj multnombraj sugestoj.

Mi ŝatus aldone danki miajn amikojn Thurian Lefort pro lia relego kaj trovo multajn tajperarojn en la franca kaj angla versioj, kaj Louis Noiset pro interesaj diskutoj ĉirkaŭ la esperanta versio. Fine, mi dankegas mian eksprofesoron de esperanto Jesper Jacobsen, kiu instruis multon al mi, ne nur dum liaj kursoj ĉe ENS.

Referencoj

[1] Dave Bayer, Persi Diaconis. Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair. *Ann. Appl. Prob.*, 2(2):294-313, 1992.

[2] Nathanaël Berestycki, Oded Schramm, Ofer Zeitouni. Mixing times for random k-cycles and coalescence-fragmentation chains. *Ann. Probab.*,39(5):1815-1843, 2011.

[3] Nathanaël Berestycki, Bati Şengül, Cutoff for conjugacy-invariant random walks on the permutation group, *Probab. Theor. Rel. Fields*, to appear.

[4] Megan Bernstein, A random walk on the symmetric group generated by random involutions. *Electronic Journal of Probability*, 2018.

[5] Megan Bernstein, Evita Nestoridi, Cutoff for random to random card shuffle, submitted

[6] Philippe Biane. Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes? *Gaz. Math.* No. 91, 4-10, 2002.

[7] Persi Diaconis. *Group representations in probability and statistics.* Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series, 11. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.

[8] Persi Diaconis, Mehrdad Shahshahani. Generating a random permutation with random transpositions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 57(2):159-179, 1981.

[9] Amaury Freslon. Cut-off phenomenon for random walks on free orthogonal quantum groups, to appear in *Probab. Theory Relat. Fields*, 2018. https://doi.org/10.1007/s00440-018-0863-8

[10] Avital Frumkin, Gordon James, Yuval Roichman. On Trees and Characters. *Journal of Algebraic Combinatorics* (2003) 17: 323. https://doi.org/10.1023/A:1025052922664

[11] Sergei V. Kerov. Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Application in Analysis

[12] Hubert Lacoin. The cutoff profile for the simple exclusion process on the circle, *Ann. Probab.*, 44(5), 3399-3430, 2016.

[13] Nathan Lulov and Igor Pak. Rapidly mixing random walks and bounds on characters of the symmetric group. *J. Algebraic Combin.*, 16(2):151–163, 2002.

[14] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov chains and mixing times.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson.

[15] Peter Matthews, A strong uniform time for random transpositions, *J. Theoret. Probab.* 1 (1988), 411–423.

[16] Pierre-Loïc Méliot. Representation theory of the symmetric group

[17] Justin Salez, *Temps de mélange des chaînes de Markov, Notes de cours*, 2018, https://www.lpsm.paris/pageperso/salez/mixing.html

[18] Oded Schramm, Compositions of random transpositions, *Israel J. Math.* 147 221–243.

[19] Jean-Pierre Serre. Linear Representations of Finite Groups, volume 42 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer–Verlag, 1977.