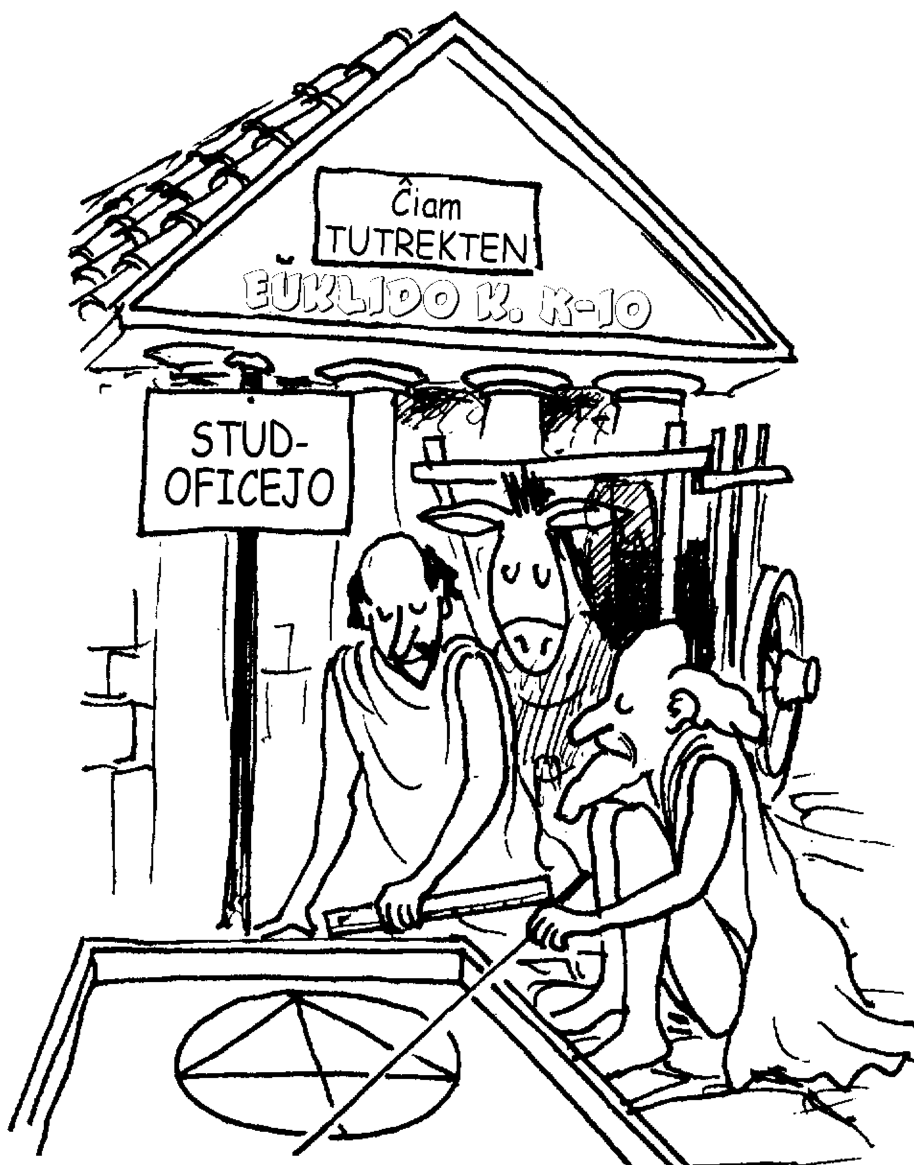
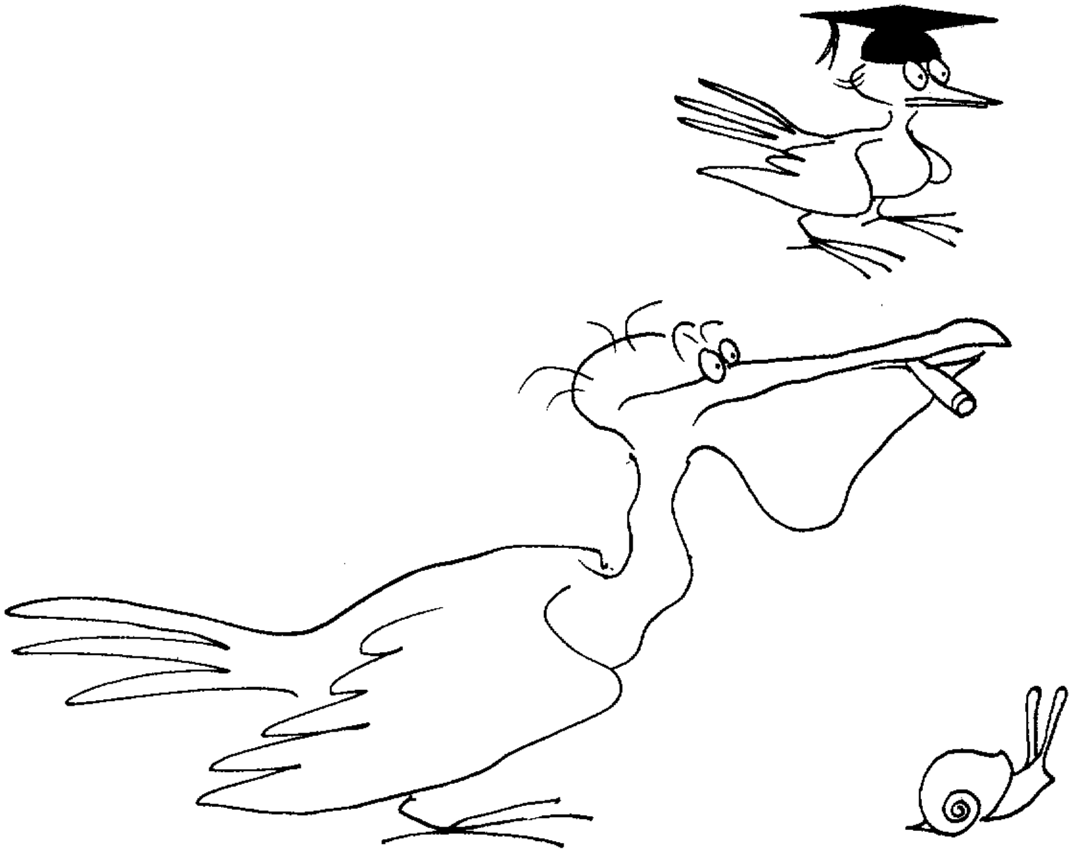
La aventuroj de Anselmo LANTURLUP'

LA GEOMETRIUMO

Jean-Pierre Petit

esperantigis Roland Platteau kaj Pierre Chibleur






Ĉu estas matematikisto en la salono ?

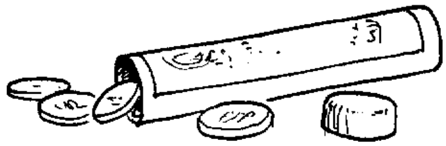
AVERTO

TIO ĈI NE ESTAS TRAKTAĴO NEK KURSO

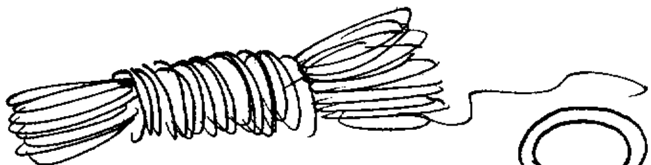
ESTAS SIMPLE LA HISTORIO PRI ANSELMO LANTURLUP'
DUM UNU EL SIAJ VOJAĜOJ
EN GEOMETRIOLANDO

VI LEGU PREFERE PROVIZITA DE

* UNUE ASPIRINO

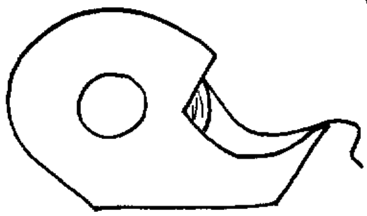


* POSTE ŜNURETO

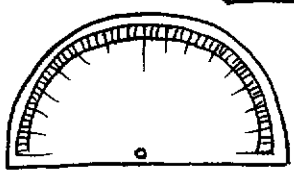


* TONDILOJ

* GLUBENDO

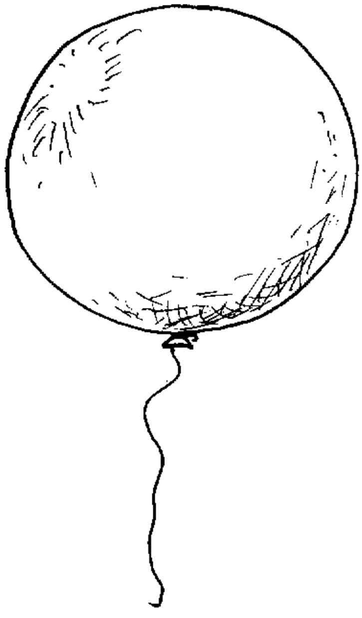


* ANGULMEZURILO



* KAJ BELETA BALONO

  BELE RONDA

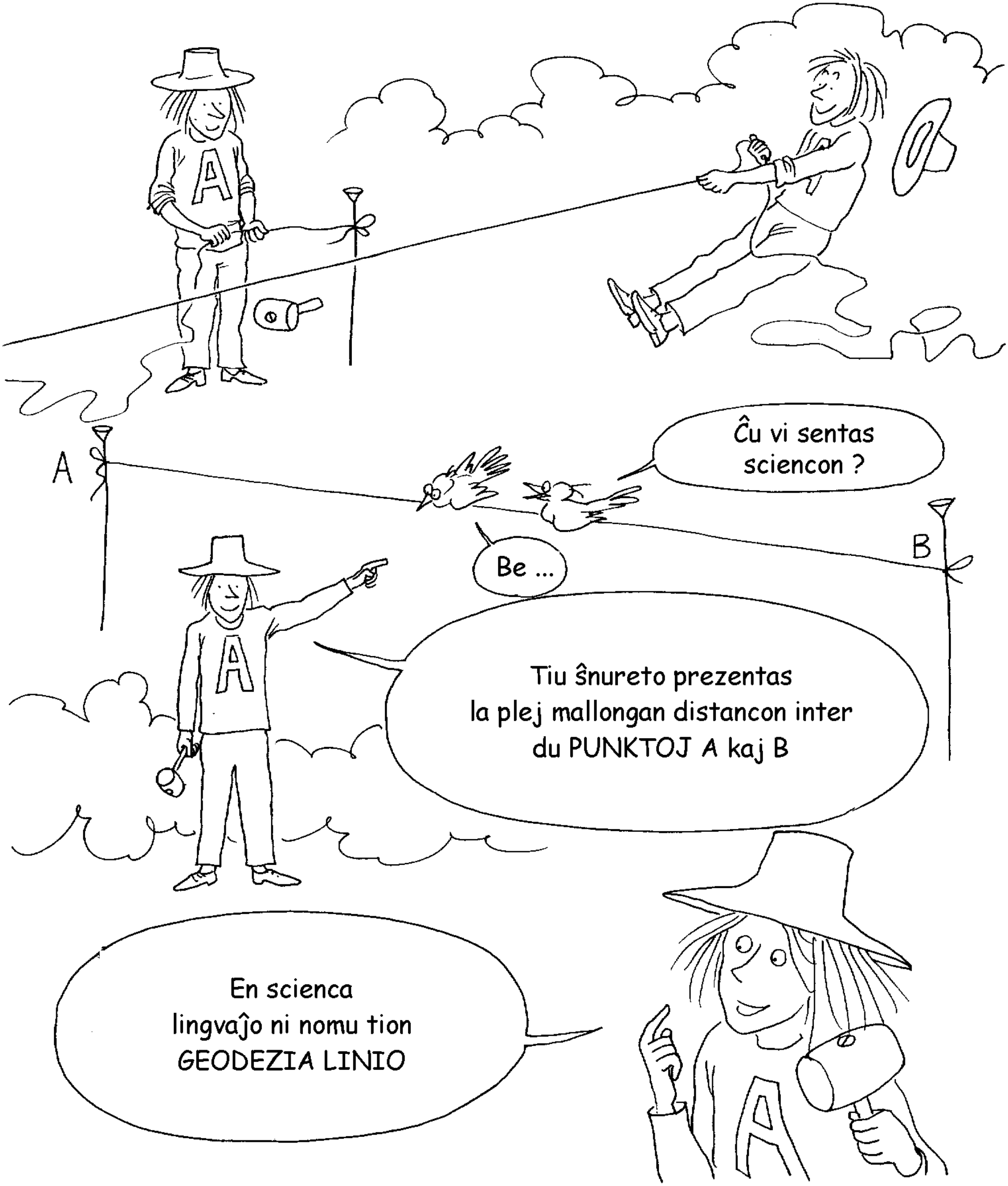


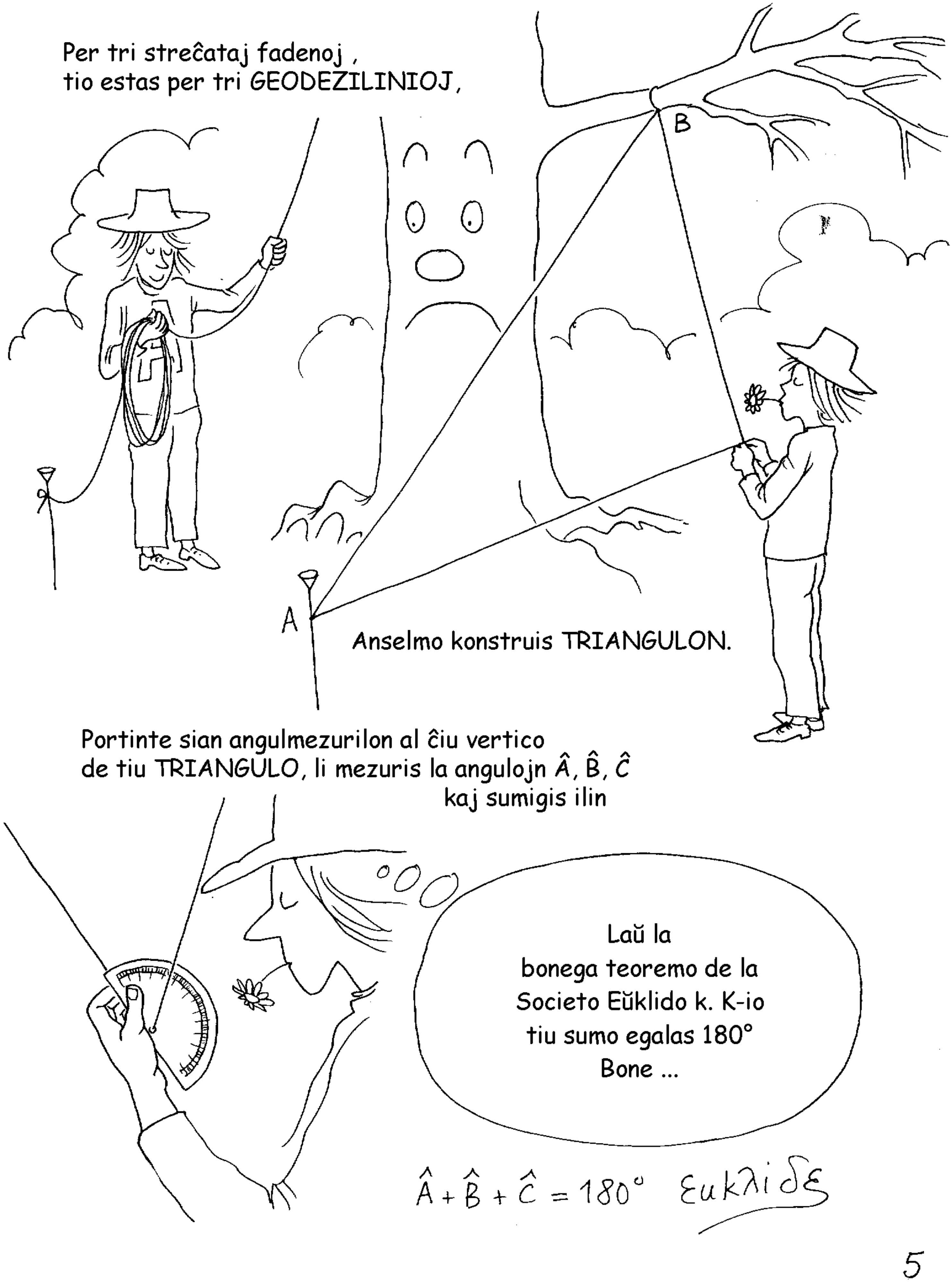
La Firmao Eŭklido k. K-io naskiĝis en Aleksandrio en la tria jarcento antaŭ Kristo. Dum dumil ducent jaroj la negoco prosperadis. La produktojn oni aprezis kaj la klientaro estis kontenta kaj fidela.

Sed iom post iom, la gustoj de l'klientoj ŝanĝiĝis.
Kelkaj, iam fervoruloj de la fabrikmarko,
sekve de strangaj eksperimentoj, sin demandis :
" Eŭklido, ĉu tio estas vere, ĉie kaj por ĉio,
la plej bona ? "

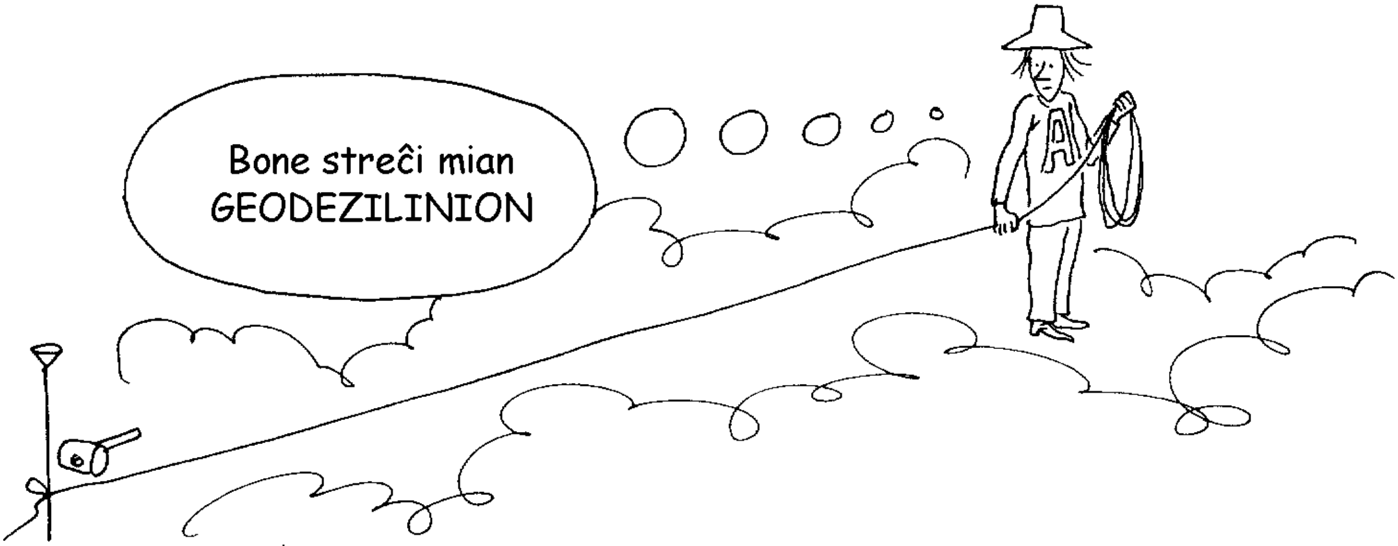
La historion de unu el ili ni tuj rakontos
al vi ĉi tie.

PROLOGO : Iam Anselmo Lanturlup' decidis streĉi ŝnureton inter du fostetoj ...




Per tri streĉataj fadenoj ,
tio estas per tri GEODEZILINIOJ,
B
A
Anselmo konstruis TRIANGULON.
Portinte sian angulmezurilon al ĉiu vertico
de tiu TRIANGULO, li mezuris la angulojn Â, B̂, Ĉ
kaj sumigis ilin
Laŭ la bonega teoremo de la Societo Eŭklido k. K-io tiu sumo egalas 180° Bone ...
Â + B̂ + Ĉ = 180° Ευκλιδε

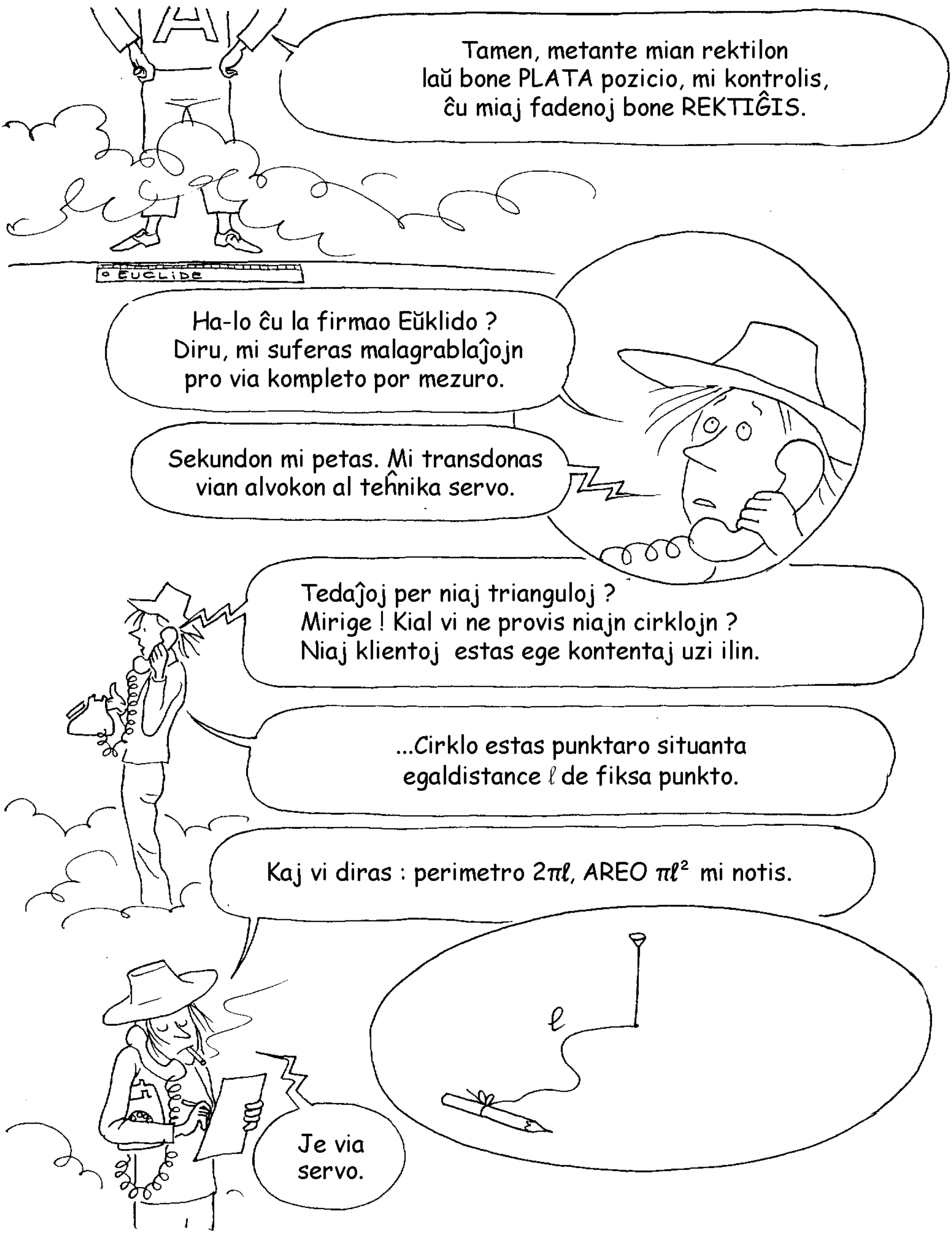
La mondo kie vivis Anselmo diable nebulis.
Oni povis nazpurigi sin kun alies nazo.

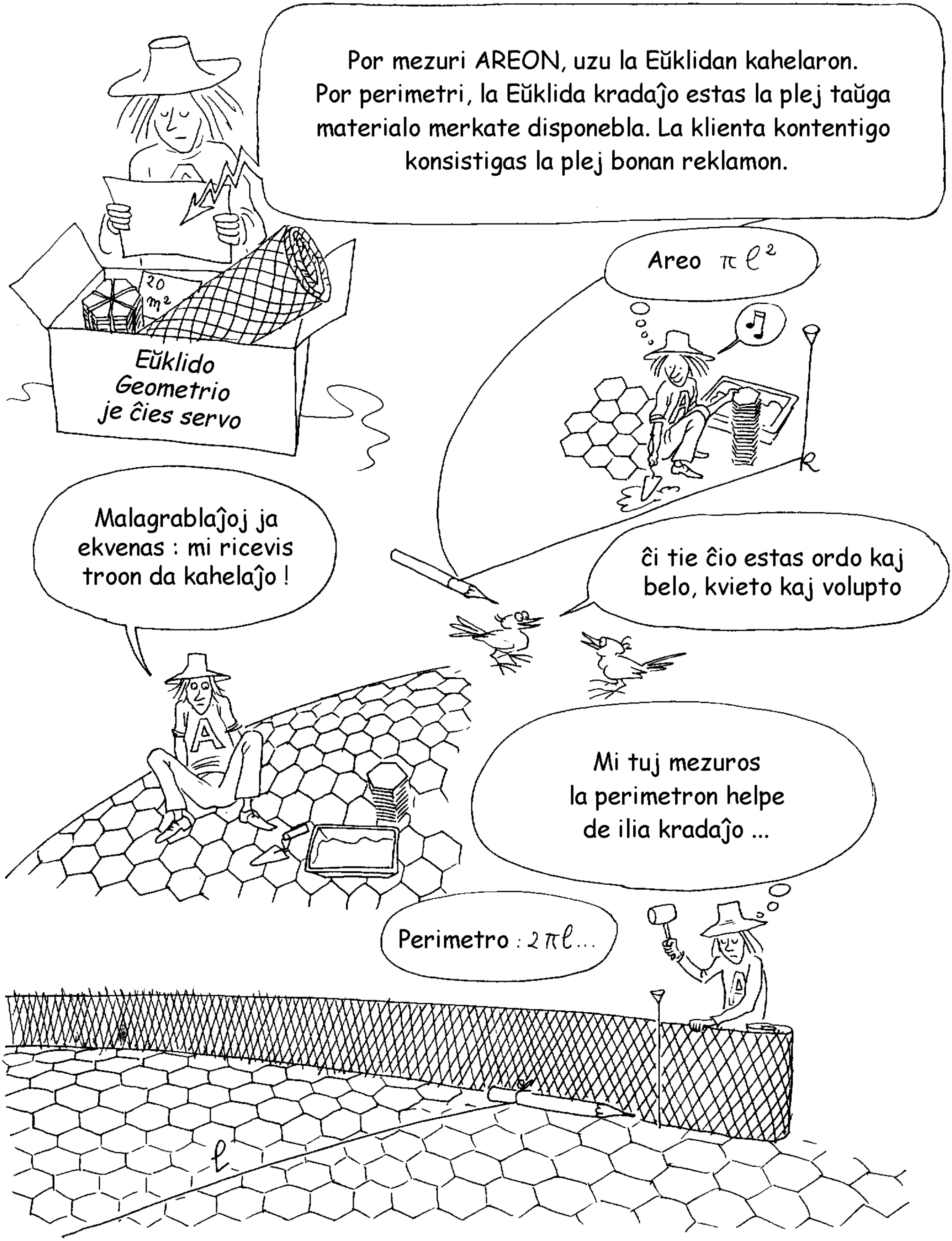


Anselmo paŝis longe,
longe...
Malantaŭ li lia ŝnureto malvolviĝadis,
tiel bone streĉata, ke li ja fajfis pri la
necerteco de lia irado ene de nebuleto :
li estis elfaranta senriproĉindan
GEODEZILINION ...

Sed, mi ne scias ĉu vi iam tion spertis, tagoj estas, kiam ŝajnas, ke ĉio iras mise.
Nekredeble !
Sed ... estas mia fosteto !
Anselmo, kiu ankoraŭ havis kvanton da ŝnureto decidis klarigi la aferon.
Nekonsternebla, li do plu streĉadis sian ŝnureton kaj plupaŝadis, REKTE ANTAŬEN, plena je scivolemo.
Ve...
Sed jen refoje mia fosteto !
... La REKTO Anselma fermiĝis !


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Ni provu Eŭklidan teoremon. Mi tuj tiros tri GEODEZILINIOJN egallongajn. Mi ricevos TRIANGULON kies tri anguloj nepre mezuros po 60° ĉiu, dum ilia sumo atingas 180°. Tio 'stas skribita sur la uzindika pamfleto.
B
60
60
60
A
C
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$
Poste mi decidos, kion fari.
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
A
Jen mia dua vertico B. Nur restas streĉi du pliajn fadenojn por trovi la trian.
Belas scienco
B
Skorzonero ! La anguloj ja estas sammezuraj - sed je pli ol 60°.
Ĉu problemo ?
C
A
Kaj ili sumas kompreneble pli ol 180° !
EŬKLIDA GEOMETRIO
EUCLIDE
EUCLIDE


Tamen, metante mian rektilon laŭ bone PLATA pozicio, mi kontrolis, ĉu miaj fadenoj bone REKTIĜIS.
EUCLIDE
Ha-lo ĉu la firmao Eŭklido ? Diru, mi suferas malagrablaĵojn pro via kompleto por mezuro.
Sekundon mi petas. Mi transdonas vian alvokon al teĥnika servo.
Tedaĵoj per niaj trianguloj ? Mirige ! Kial vi ne provis niajn cirklojn ? Niaj klientoj estas ege kontentaj uzi ilin.
...Cirklo estas punktaro situanta egaldistance ℓ de fiksa punkto.
Kaj vi diras : perimetro $2\pi\ell$, AREO $\pi\ell^2$ mi notis.
ℓ
Je via servo.

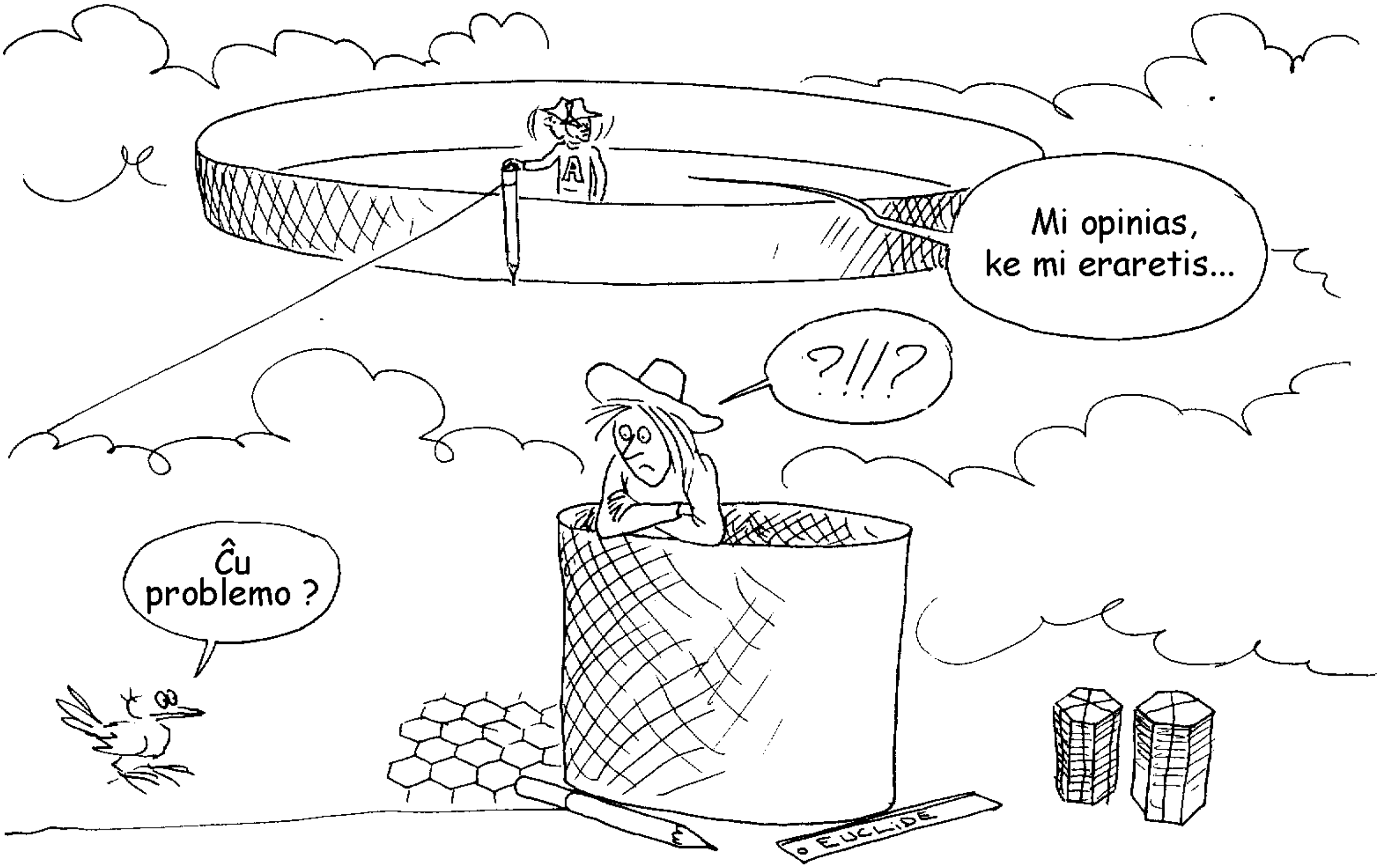


Por mezuri AREON, uzu la Eŭklidan kahelaron. Por perimetri, la Eŭklida kradaĵo estas la plej taŭga materialo merkate disponebla. La klienta kontentigo konsistigas la plej bonan reklamon.
20 m²
Eŭklido Geometrio je ĉies servo
Areo $\pi \ell^2$
Malagrablaĵoj ja ekvenas : mi ricevis troon da kahelaĵo !
ĉi tie ĉio estas ordo kaj belo, kvieto kaj volupto
Mi tuj mezuros la perimetron helpe de ilia kradaĵo ...
Perimetro : $2\pi\ell$...
ℓ


Ankaŭ kradaĵon mi havas troa !
Ha-lo, la Eŭklida firmao ? Jes ja estas mi denove ! Al mi restas gravaj kahelaraj KAJ kradaĵaj defalaĵoj ! $\pi\ell^2$ kaj $2\pi\ell$ tio tute ne funkcias ! Kiel via negoco !
Ne kriu tiamaniere, sinjoro. Mi estas nur la sekretariino. Mi transdonas la alvokon al la teĥnika servo.
Ne, tute ne la kaheloj bone juntas, mia radiuso bele rektas kaj mia kradaĵo kunliniiĝas sur la CIRKLOLINIO.
Sinjoro bone kredu, ke tio okazas kiel unua fojo. Denove provu, kaj ne maltrankviliĝu, vi scias, ke niaj teoremoj estas garantiataj.
Anselmo do daŭrigis sian esploron, pligrandigante ĉiufoje la radiuson de lia cirklo. Sed la kvanto da defalaĵoj pli kaj pli grandiĝis...

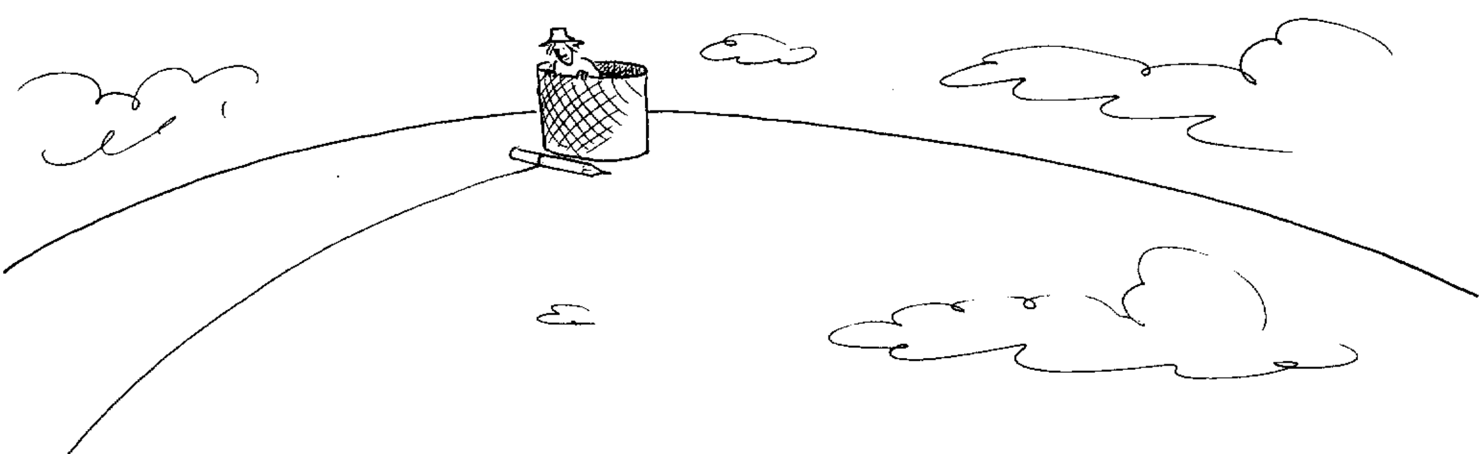
Nekredeble : nun mi troas je pli ol 36% da kradaĵo kaj 19% da plia kahelaro ! Kaj la cirklo, kiun mi desegnas, iĝis .... REKTA LINIO !
Ĉu mi deliras ?
Je la spaco ! Tiu rektilo tamen bone rektas !
EUCLIDE
Anselmo plu pligandigas la radiuson, kaj tiam ...
EUCLIDE
La kurbeco de mia cirklo inversiĝis je l'alia flanko !
Kaj nun, kiam mi PLIGRANDIGAS ℓ, mia perimetro MALPLIGRANDIĜAS, estas frenezula afero !

Post lasta kahelado :



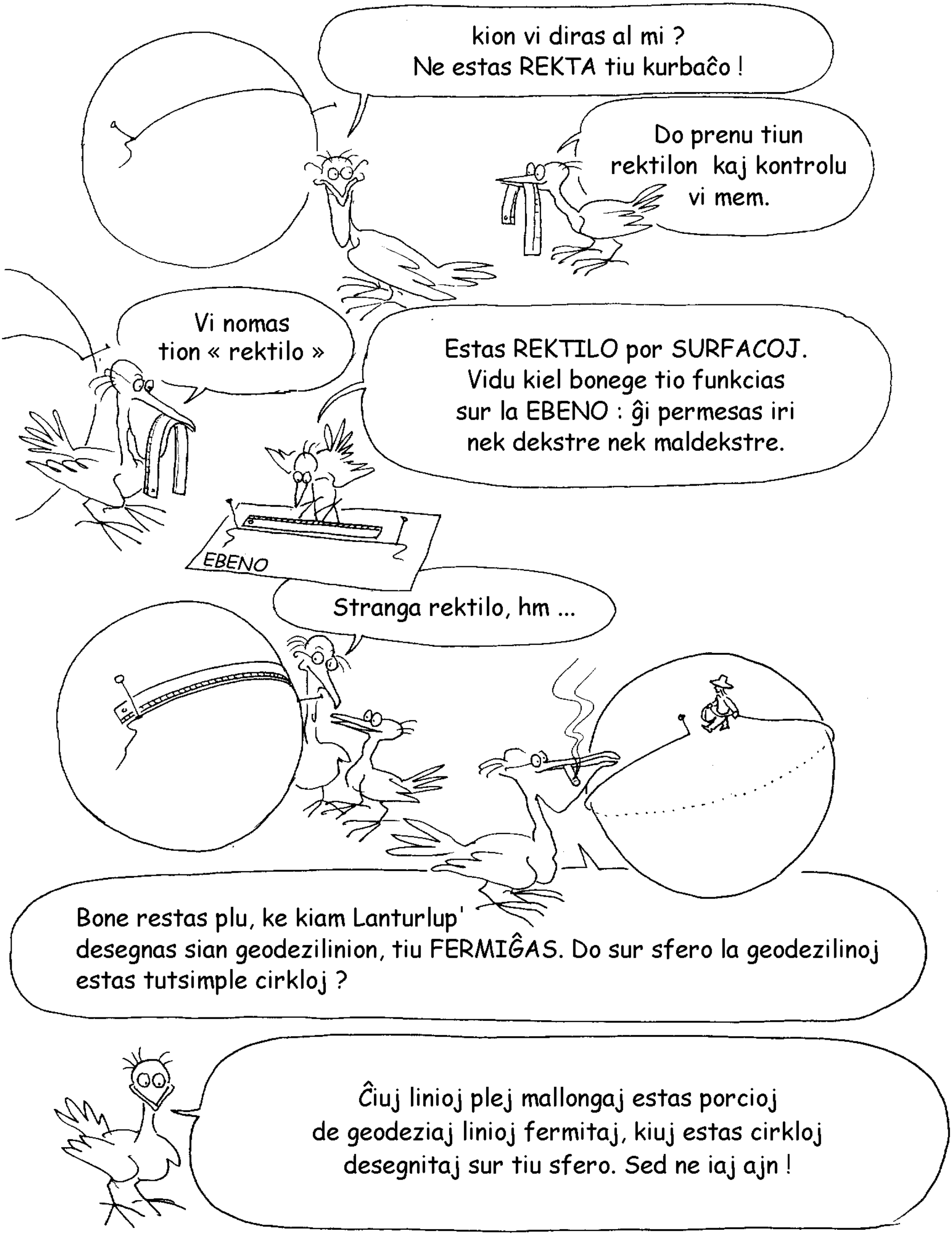
KIO OKAZIS ?

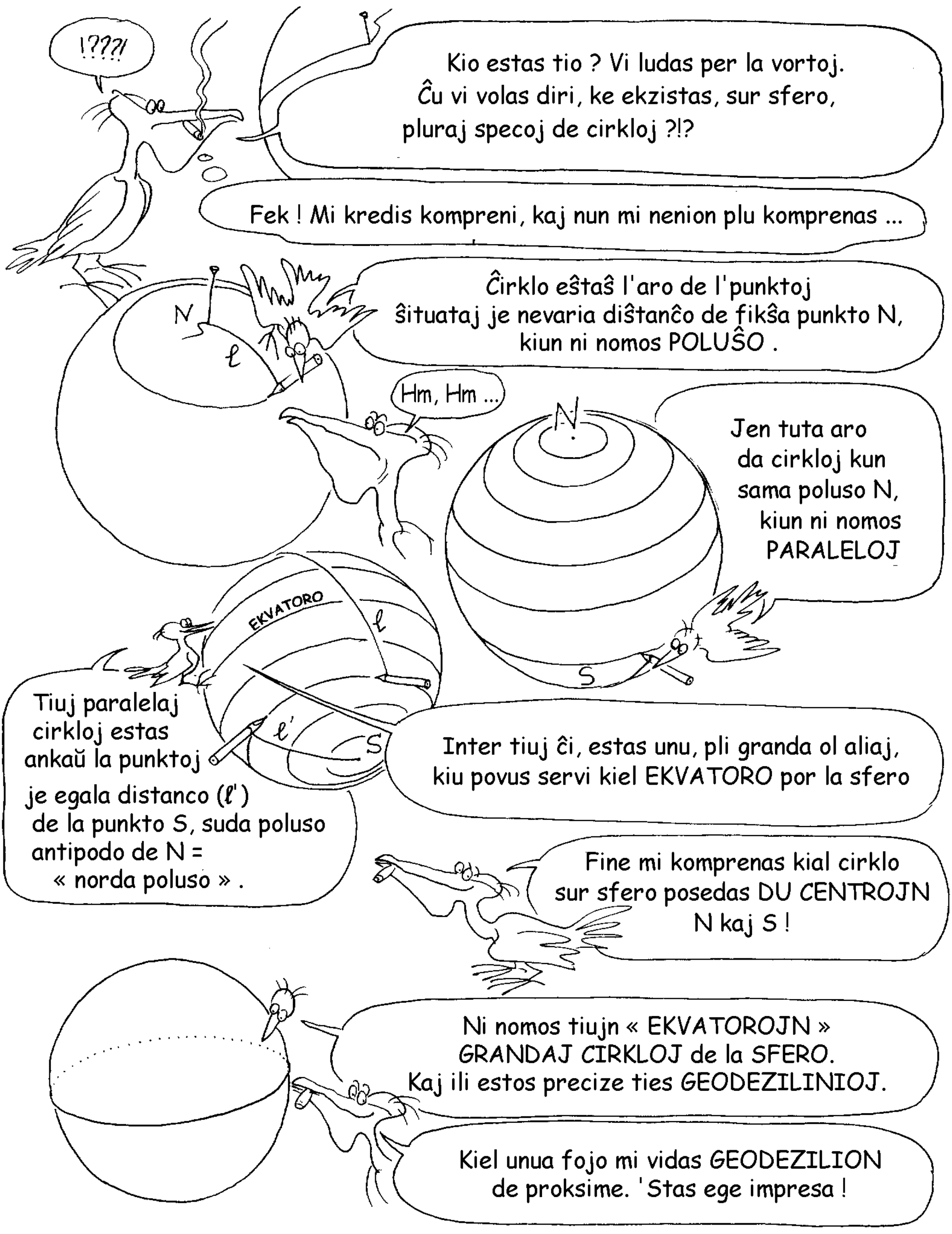
Por tion ekscii, ni forviŝu la nubojn ...

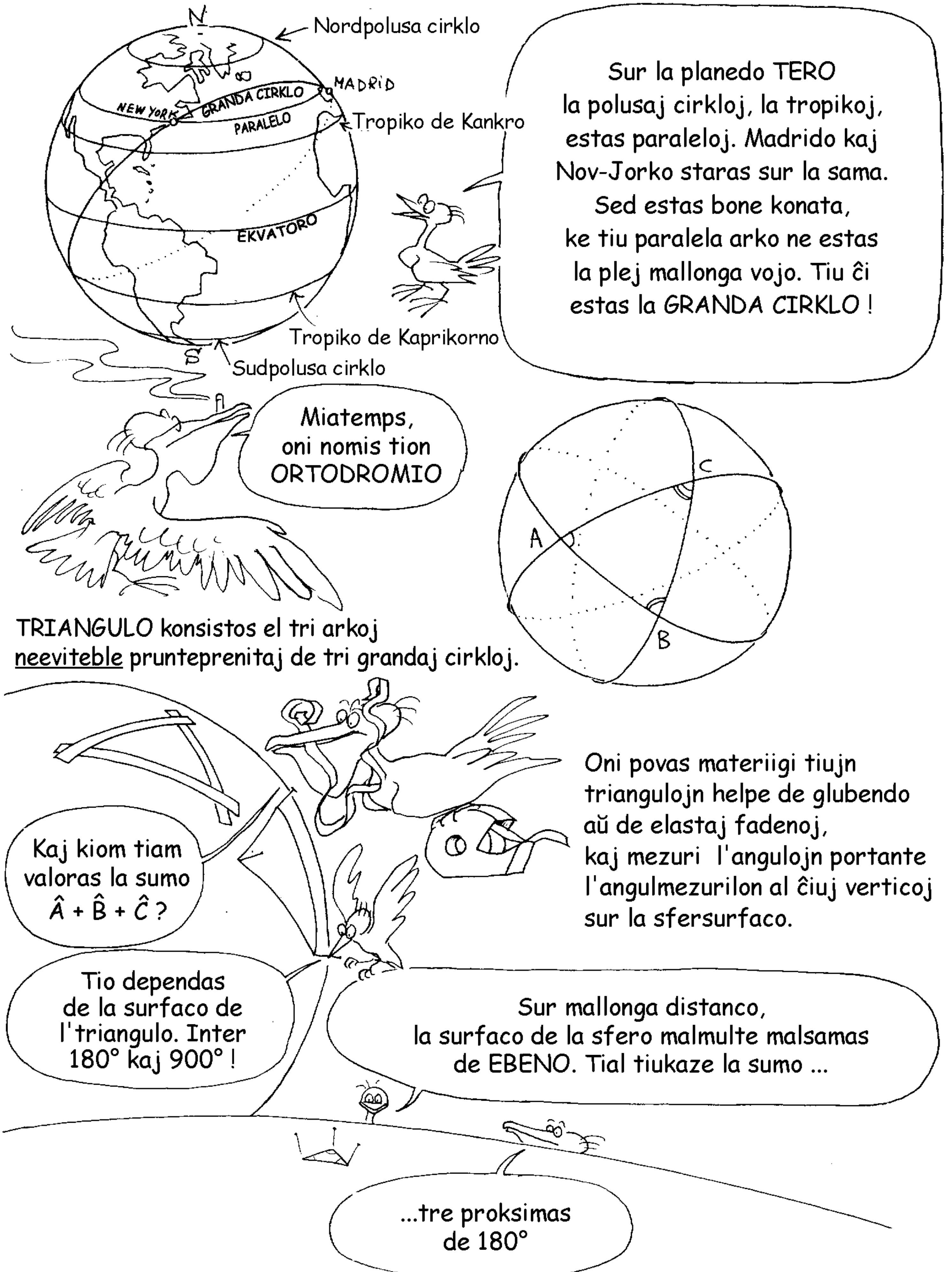


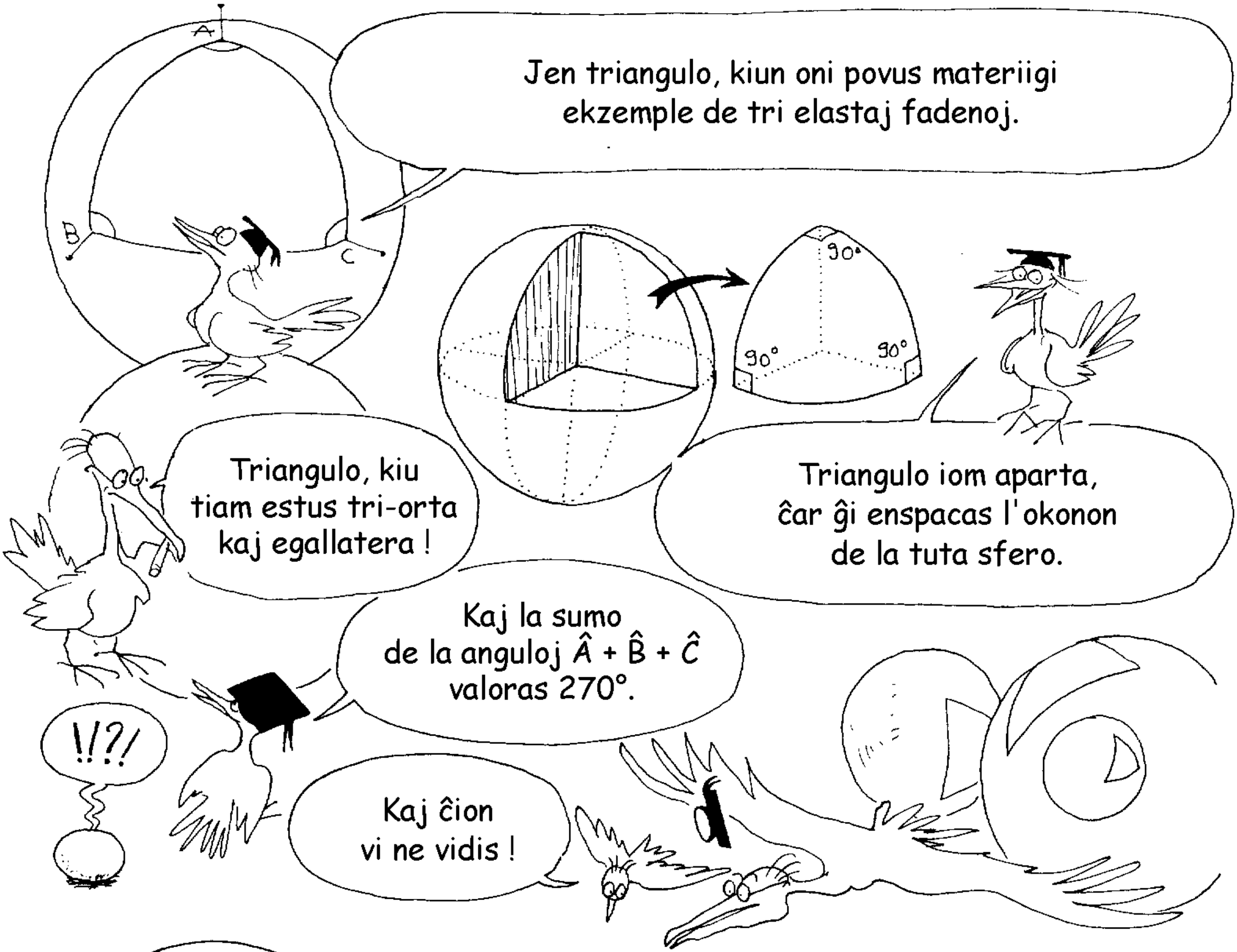
Anselmo subite komprenas, ke li staras sur sfero,
sur kio li aplikis la regulojn
de la GEOMETRIO de la EBENO.

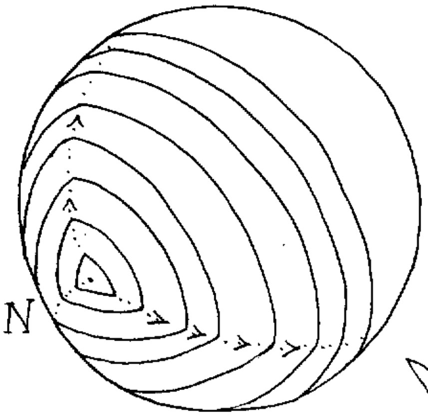

Sed kiel faris Anselmo por desegni REKTAJN LINIOJN sur sfero ? Tio ne havas sencon !
Atentu, mi suspektas kaptilon !
Estimata, kion vi nomas rekto ? Se estas la plej mallonga distanco de punkto al alia, tiam estas REKTOJ sur sfero.
La nocio de geodezilinio (linio kiu kuras plej mallonge) ne estas ekskluziveco de la EBENO
EBENO
Streĉu elastan fadenon inter du punktoj de sfero
SBOING
...Delasu
Vi ricevas GEODEZILINION


kion vi diras al mi ?
Ne estas REKTA tiu kurbaĉo !
Do prenu tiun rektilon kaj kontrolu vi mem.
Vi nomas tion « rektilo »
Estas REKTILO por SURFACOJ. Vidu kiel bonege tio funkcias sur la EBENO : ĝi permesas iri nek dekstre nek maldekstre.
EBENO
Stranga rektilo, hm ...
Bone restas plu, ke kiam Lanturlup' desegnas sian geodezilinion, tiu FERMIĜAS. Do sur sfero la geodezilinoj estas tutsimple cirkloj ?
Ĉiuj linioj plej mallongaj estas porcioj de geodeziaj linioj fermitaj, kiuj estas cirkloj desegnitaj sur tiu sfero. Sed ne iaj ajn !


!???!
Kio estas tio ? Vi ludas per la vortoj.
Ĉu vi volas diri, ke ekzistas, sur sfero,
pluraj specoj de cirkloj ?!?
Fek ! Mi kredis kompreni, kaj nun mi nenion plu komprenas ...
N
ℓ
Ĉirklo eŝtaŝ l'aro de l'punktoj
ŝituataj je nevaria diŝtanĉo de fikŝa punkto N,
kiun ni nomos POLUŜO .
Hm, Hm ...
N
Jen tuta aro
da cirkloj kun
sama poluso N,
kiun ni nomos
PARALELOJ
S
EKVATORO
ℓ
ℓ'
S
Tiuj paralelaj
cirkloj estas
ankaŭ la punktoj
je egala distanco (ℓ')
de la punkto S, suda poluso
antipodo de N =
« norda poluso » .
Inter tiuj ĉi, estas unu, pli granda ol aliaj,
kiu povus servi kiel EKVATORO por la sfero
Fine mi komprenas kial cirklo
sur sfero posedas DU CENTROJN
N kaj S !
Ni nomos tiujn « EKVATOROJN »
GRANDAJ CIRKLOJ de la SFERO.
Kaj ili estos precize ties GEODEZILINIOJ.
Kiel unua fojo mi vidas GEODEZILION
de proksime. 'Stas ege impresa !

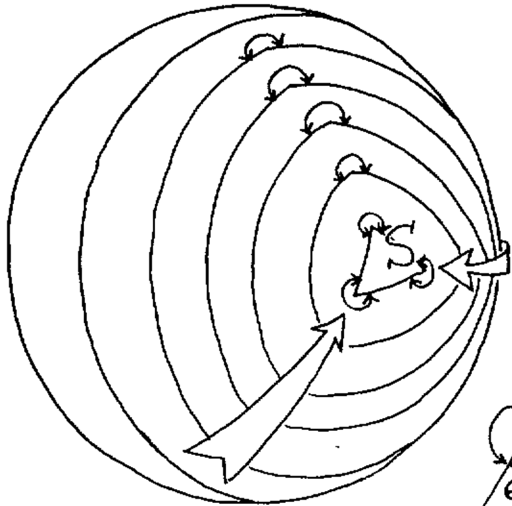

N
Nordpolusa cirklo
MADRID
NEW YORK
GRANDA CIRKLO
PARALELO
Tropiko de Kankro
EKVATORO
Tropiko de Kaprikorno
S
Sudpolusa cirklo
Sur la planedo TERO la polusaj cirkloj, la tropikoj, estas paraleloj. Madrido kaj Nov-Jorko staras sur la sama. Sed estas bone konata, ke tiu paralela arko ne estas la plej mallonga vojo. Tiu ĉi estas la GRANDA CIRKLO !
Miatemps, oni nomis tion ORTODROMIO
A
B
C
TRIANGULO konsistos el tri arkoj neeviteble prunteprenitaj de tri grandaj cirkloj.
Oni povas materiigi tiujn triangulojn helpe de glubendo aŭ de elastaj fadenoj, kaj mezuri l'angulojn portante l'angulmezurilon al ĉiuj verticoj sur la sfersurfaco.
Kaj kiom tiam valoras la sumo Â + B̂ + Ĉ ?
Tio dependas de la surfaco de l'triangulo. Inter 180° kaj 900° !
Sur mallonga distanco, la surfaco de la sfero malmulte malsamas de EBENO. Tial tiukaze la sumo ...
...tre proksimas de 180°





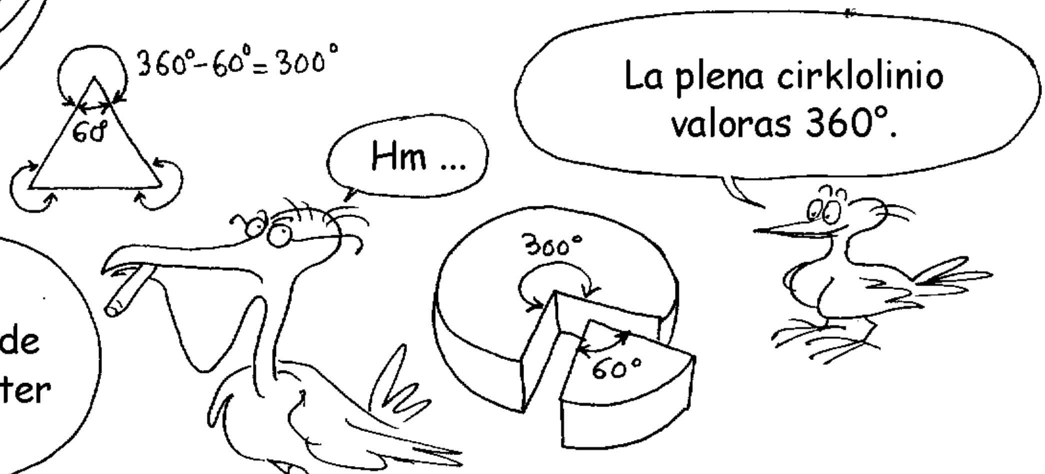
Ni imagu nun triangulon, ĉiam konsistantan
el tiuj elastaj fadenoj, kies verticojn ni iom
post iom malproksimigas. La tieaj anguloj plivastiĝos.
Kaj same ilia sumo.

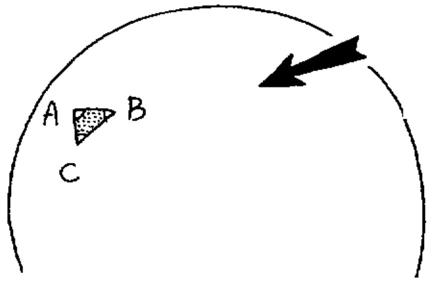
Fine oni povas elturniĝi,
ke la tri verticoj enskribiĝu sur ekvatoro
de la sfero. La anguloj $\hat{A}$, $\hat{B}$ kaj $\hat{C}$ tiam estas STREĈITAJ,
valoras 180°, kaj ilia sumo atingas 540° ! !



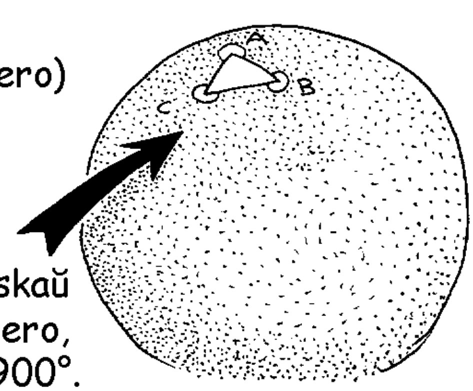
Pluigante tiun migradon de la verticoj de la triangulo sur la alia duonsfero, tiuj ĉi konverĝos al la punkto S, antipodo de N.
Se oni konservas al la verticaj anguloj ilian ekkomencan difinon, ĉiu el ili tiam valoros pli ol 180° !
Por paroli precize, ili valoros ĉiu 360°- 60°=300°.

Sumo 300 x 3 = 900°

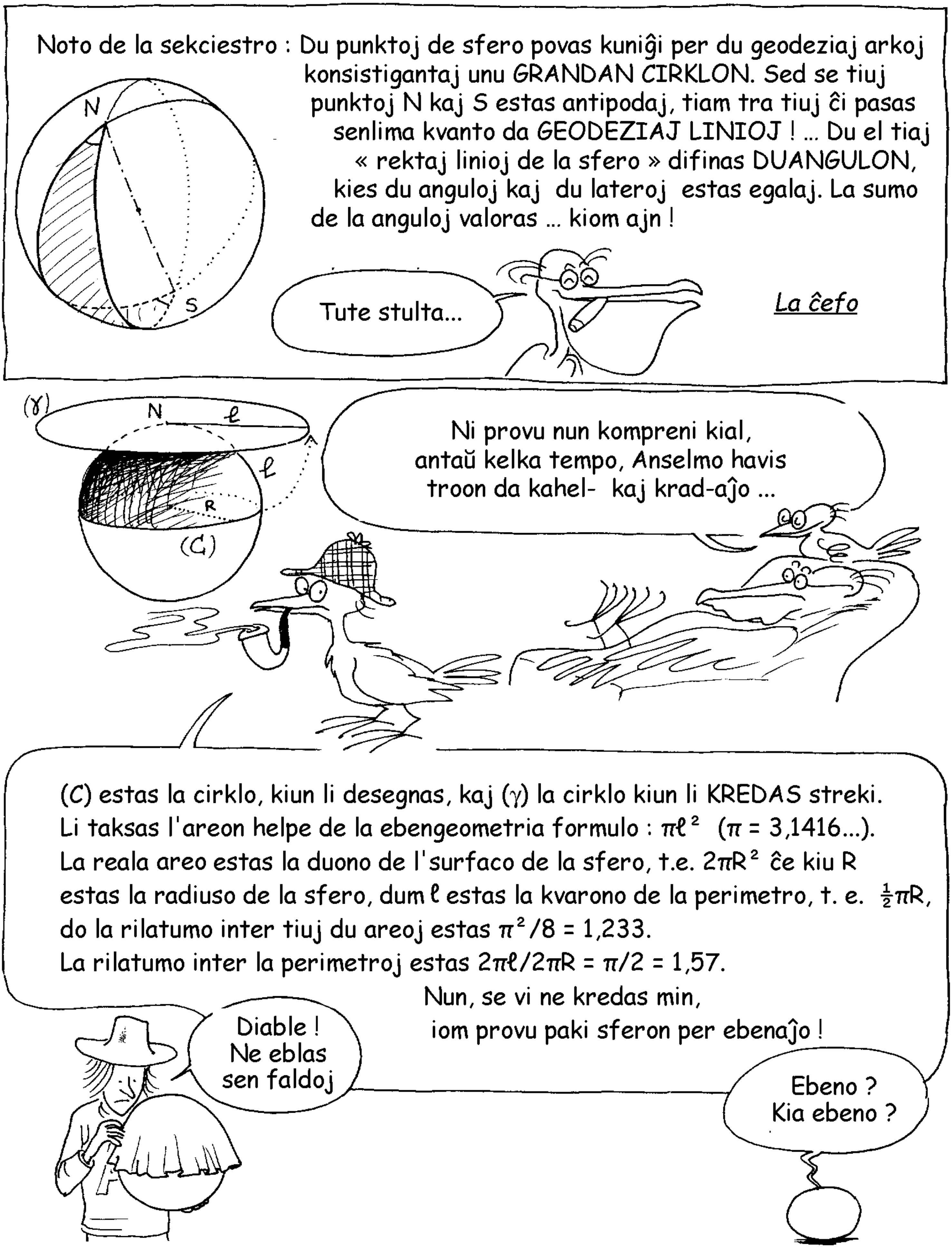


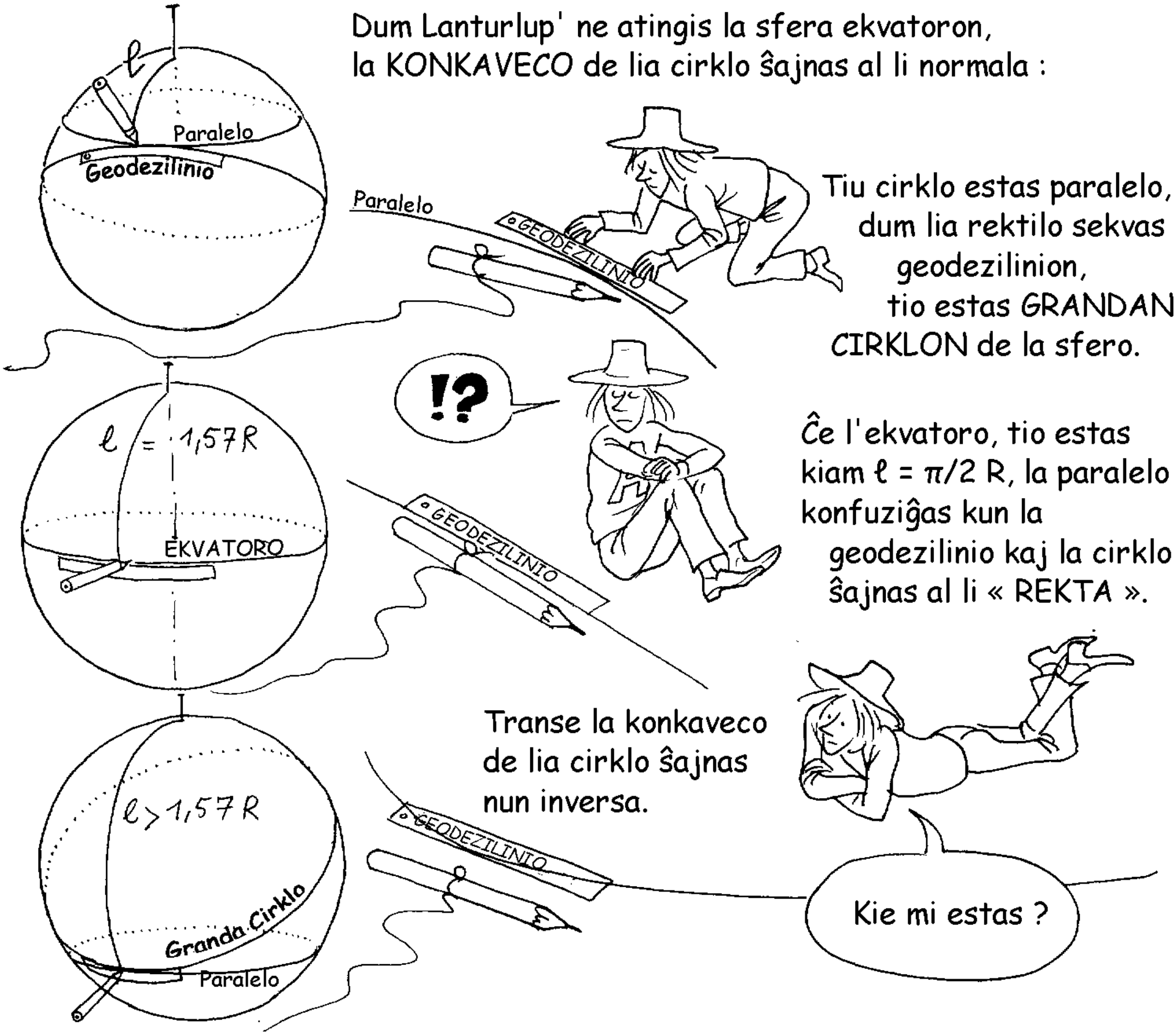


Se la triangulo havas malgrandan aeron (kompare kun tiu de la sfero) oni retrovas Eŭklidon : ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$)

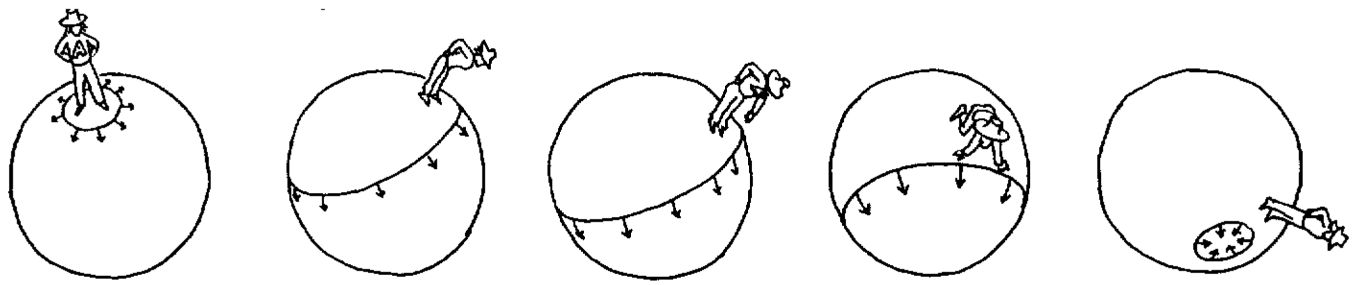


Se, male, la triangulo enspacas preskaŭ la plenant surfacon de la sfero, $4 \times 3{,}1416 \times R^2$, ni retrovos 900°.

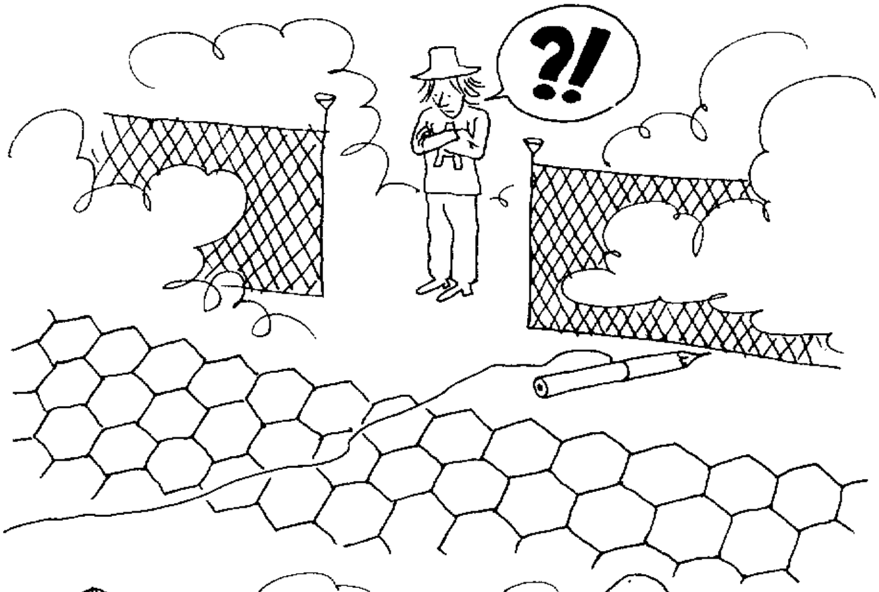

Noto de la sekciestro : Du punktoj de sfero povas kuniĝi per du geodeziaj arkoj konsistigantaj unu GRANDAN CIRKLON. Sed se tiuj punktoj N kaj S estas antipodaj, tiam tra tiuj ĉi pasas senlima kvanto da GEODEZIAJ LINIOJ ! ... Du el tiaj « rektaj linioj de la sfero » difinas DUANGULON, kies du anguloj kaj du lateroj estas egalaj. La sumo de la anguloj valoras ... kiom ajn !
N
S
Tute stulta...
La ĉefo
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Ni provu nun kompreni kial, antaŭ kelka tempo, Anselmo havis troon da kahel- kaj krad-aĵo ...
(C) estas la cirklo, kiun li desegnas, kaj (γ) la cirklo kiun li KREDAS streki.
Li taksas l'areon helpe de la ebengeometria formulo : $\pi\ell^2$ ($\pi = 3{,}1416...$).
La reala areo estas la duono de l'surfaco de la sfero, t.e. $2\pi R^2$ ĉe kiu R estas la radiuso de la sfero, dum ℓ estas la kvarono de la perimetro, t. e. $\frac{1}{2}\pi R$,
do la rilatumo inter tiuj du areoj estas $\pi^2/8 = 1{,}233$.
La rilatumo inter la perimetroj estas $2\pi\ell/2\pi R = \pi/2 = 1{,}57$.
Nun, se vi ne kredas min, iom provu paki sferon per ebenaĵo !
Diable ! Ne eblas sen faldoj
Ebeno ? Kia ebeno ?



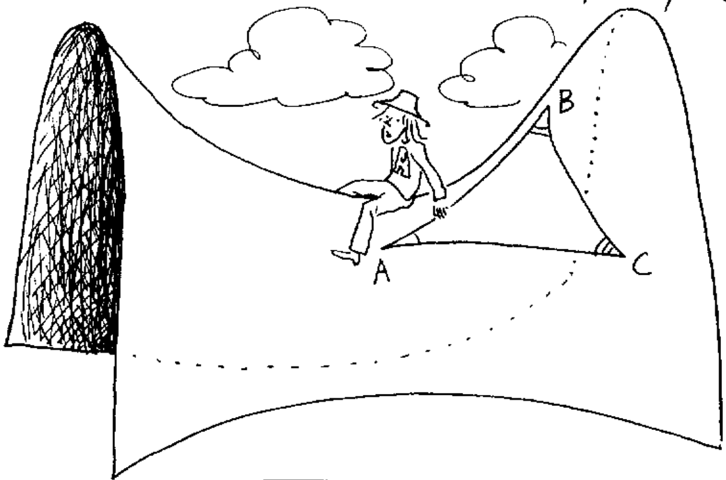
Tiu propreco klarigas kiel oni povas laŭvole « eniri » aŭ « eliri » cirklon, sen « transi » ĝin ! Kiam ĝi estas desegnita sur sfero. Necesas imagi tiun cirklon kiel elasta ringo, kiun oni glitigus sur bilarda globo.



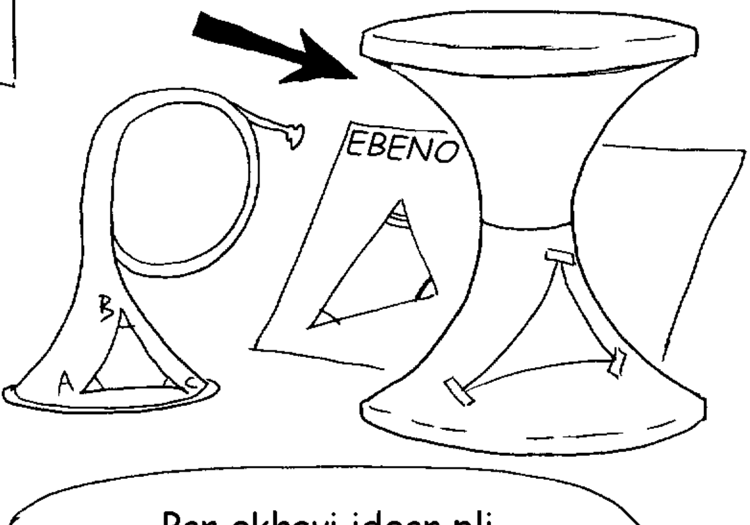

Sfera geometrio
GAUSS
Anselmo bezonis certan tempon por « digesti » ĉiujn tiujn aspektojn, malkovritajn de la matematikisto Gaŭso (1777-1855).
Li decidis foriri por esplori la mondon de la SURFACOJ.
Bone, mi havas ĉion necesan : rektilo, angulmezurilo, ŝnureto, mia maleo. Ni iru ...
Scii !
Foje scienco kondukas onin al riskplenan vivon ...
Alteringînte en novan mondon, Anselmo malvolvas ankoraŭfoje GEODEZIAN LINION, sed tiun fojon :
Diable, tiu surfaco nenie alkondukas !
La geodezilinio ne fermiĝas.
Nu, jen alia problemo !
Helpe de tri fadenoj bone streĉitaj, Anselmo konstruas triangulon, sed la sumo de la verticaj anguloj riveliĝas, tiufoje, malsupera je 180°

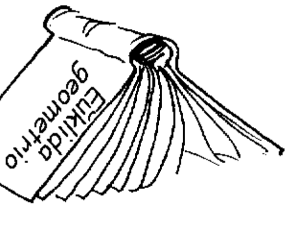


Cirklo estas plu l'aro de l'punktoj situantaj je sama distanco ℓ de fiksa punkto. Lanturlup' konstatas, ke tiu cirklo, desegnita sur tiu nova surfaco, havas perimetron SUPERA je $2\pi\ell$, kaj ties areo TRANSPASAS $\pi\ell^2$. Ni forŝiru la nubojn :



La surfaco prezentas tiufoje la formon de intermonto aŭ de ĉevala selo. Kelkaj objektoj de via ĉiutaga vivo povas egale taŭgi : ĉaskorno aŭ tiu tipo de tabureto :



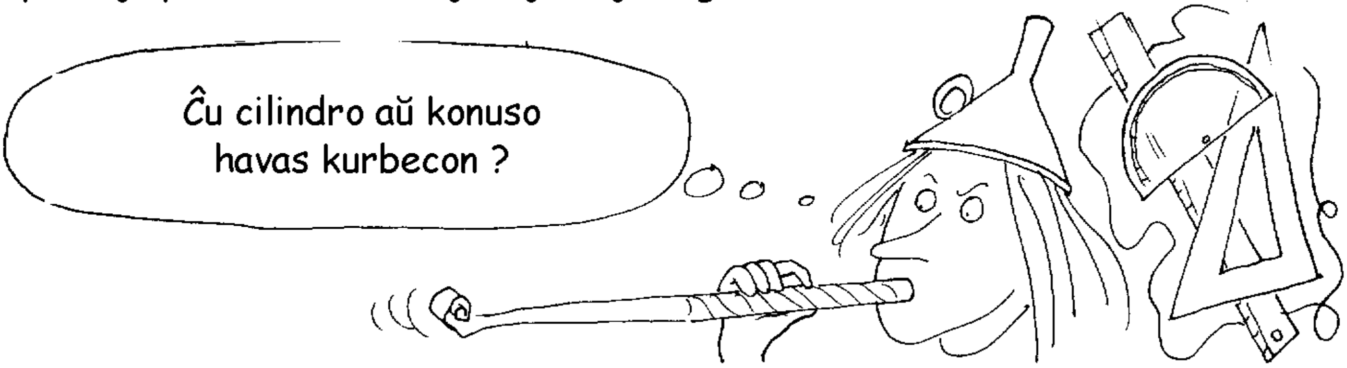


KURBECO :

Kurba surfaco estas surfaco, kie la Eŭklidaj teoremoj ne funkcias. La kurbeco povas esti pozitiva aŭ negativa.
Sur surfaco kun POZITIVA KURBECO, la sumo de la anguloj de triangulo superas 180°. Se oni desegnas cirklon kun radiuso ℓ, ties surfaco malsuperas $\pi\ell^2$ kaj ties perimetro iĝas malsupera je $2\pi\ell$.
Sur surfaco kun NEGATIVA KURBECO la sumo de la anguloj de triangulo malsuperas 180°. Se oni desegans cirklon kun radiuso ℓ, ties areo superas $\pi\ell^2$ kaj ties perimetro iĝas supera je $2\pi\ell$.

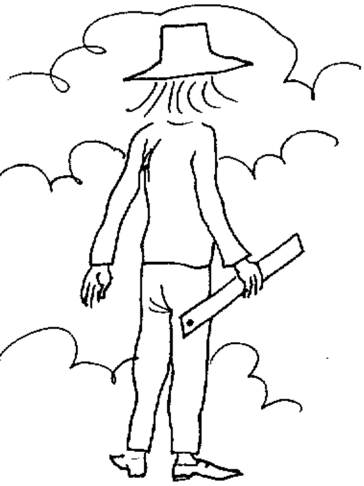
Antaŭ kelka tempo Anselmo konstatis, provante PAKI sferon, kies surfaco estis pozitive kurba pere de ebena folio, ke faldoj aperas. Enpakado de surfaco negative kurba egale neeblus : krakŝiraĵoj aperus. Tiu pakado-testo estas la plej simpla por scii ĉu la kurbeco pozitivas aŭ negativas.

Kiel oni povas vidi sur la antaŭa paĝo, la surfacoj povas prezenti partojn pozitive kurbecaj, kaj aliajn negative.



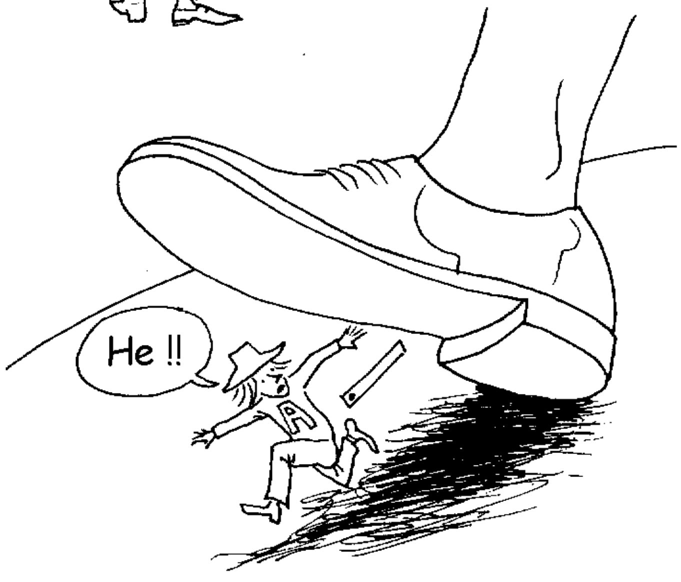

Pakad-testo ...
Cilindron, konuson, oni povas bele pakumi per ebenaĵo !
Mi ne paniku. Mi gluos tri elastajn fadenojn, t.e. tri geodezilinojn, sur mia cilindro pere de glubendo ...
B
A
C
Nun mi strekas miajn geodeziliniojn SUR la surfaco...
Mi metas mian cilindron bone bone STREĈATA...
!...
B
A
C
Laŭ nia difino, cilindroj kaj konusoj, obeantaj al EŬKLIDA geometrio, estas EBENAJ SURFACOJ !!!

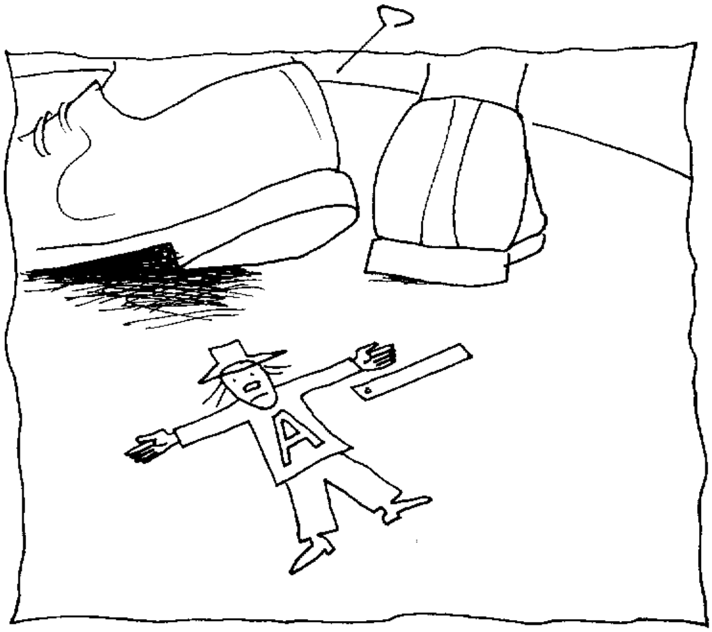
LA NOCIO SPACO :



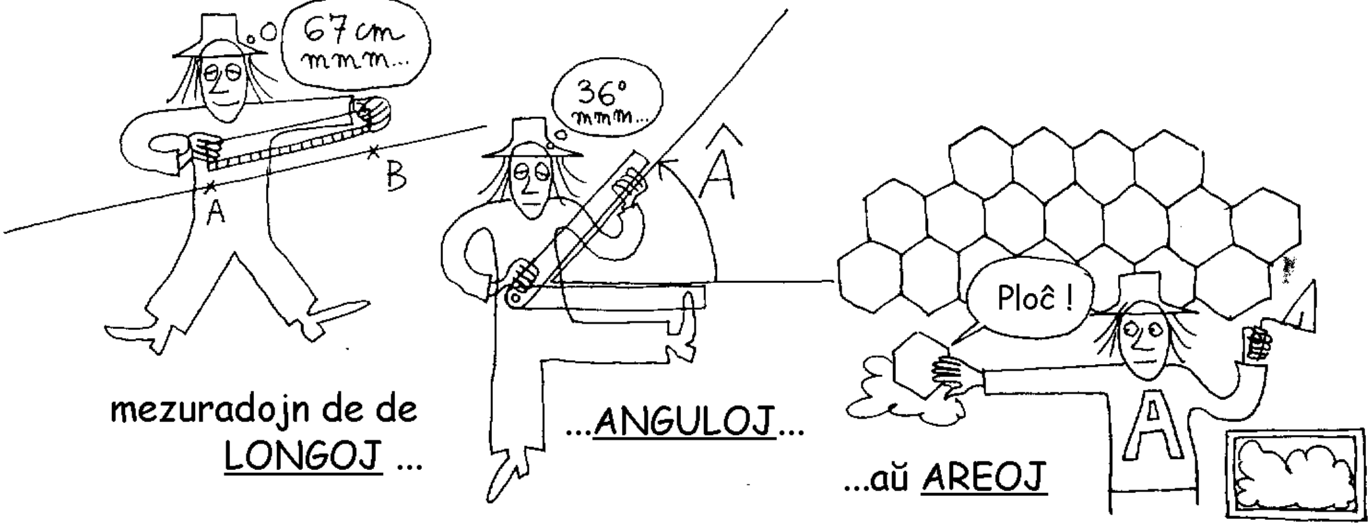
Antaŭ kelka tempo, nuboj malpermesis Anselmon vidi pli malproksimen ol sia nazfino... aŭ preskaŭ. Se ne estus tiel, li povus percepti la KURBECON de sia SFERA SPACO.

Estas alia maniero malpermesi Lanturlupon VIDI tiun kurbecon : tio estas loĝigi lin sur la surfaco, fari tiel, ke li PARTOPRENU al tiu ĉi.





Oni notos, ke tiu nova situacio neniel malpermesas la :



Kvankam limigita EN la surfaco, Anselmo bonege povus konstati la kurbecon kaj determini ĝian sencumon (pozitiva aŭ negativa) kaj eĉ mezuri ĝin, sen tamen VIDI ĝin. Se la sumo de l'anguloj de triangulo valoras 180°, tiam tiu surfaco EBENAS.

Se tiu sumo superas 180°, la kurbeco pozitivas, kaj Anselmo povas kalkuli la kurbecan radiuson R en tiu loko helpe de la formulo

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}14\, R^2}\right) \text{ gradoj,}$$

kie A estas l'areo de la triangulo.

Se tiu sumo malsuperas 180°, oni povas difini kurbecan radiuson R donita per :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3{,}14\, R^2}\right)$$

sed ĝi ne plu havas sian fizikan sencon kutiman.

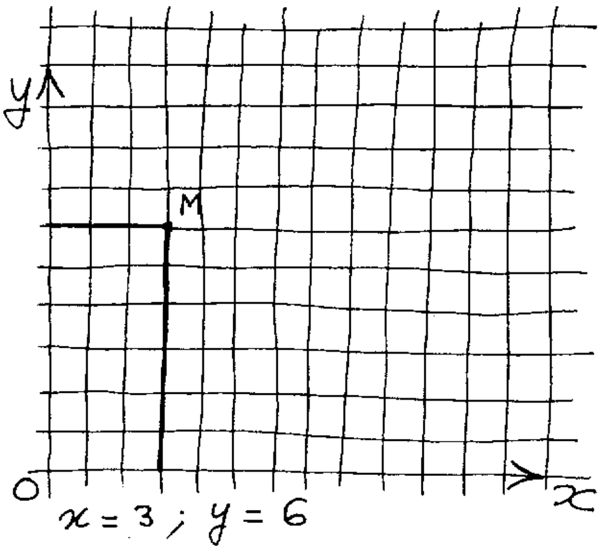
Oni notos, ke EBENON oni povas rigardi kiel simila al surfaco kun kurbeca radiuso = nefinio.

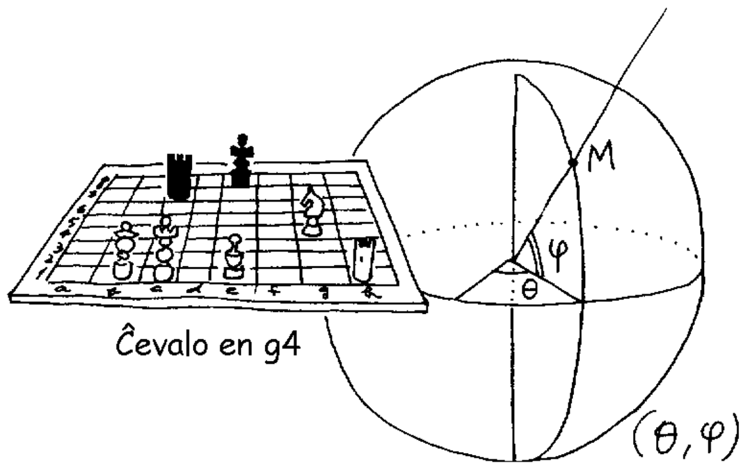
Ni tiam retrovas ĉiujn Eŭklidajn teoremojn.

LA KONCEPTO DIMENSIO

La nombro da dimensioj estas simple la nombro da kvantoj, da koordinatoj, kiuj estas necesaj, en ajna spaco, por difini PUNKTON.

La surfacoj estas bildigoj de spacoj kun du dimensioj. La kvantoj uzataj por la lokalizado povas esti longoj, nombroj, anguloj ...

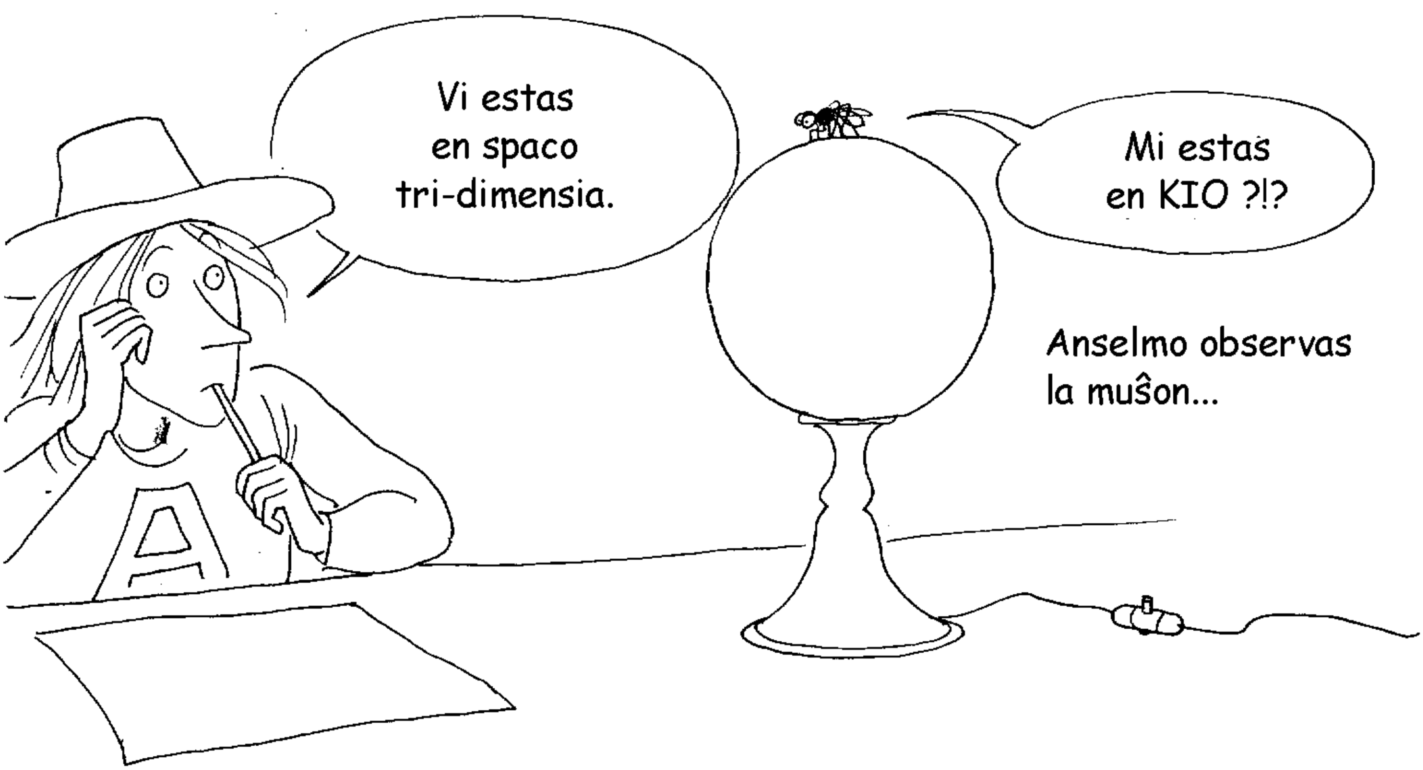


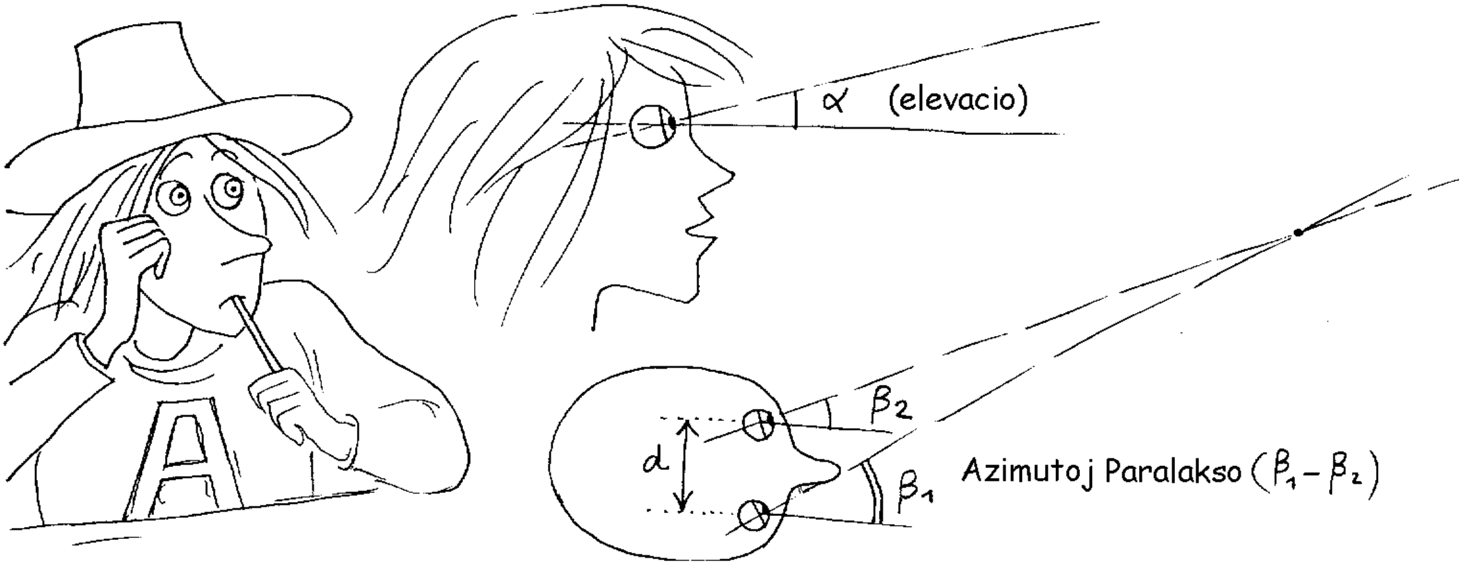


Ĉevalo en g4

Longitudo, latitudo

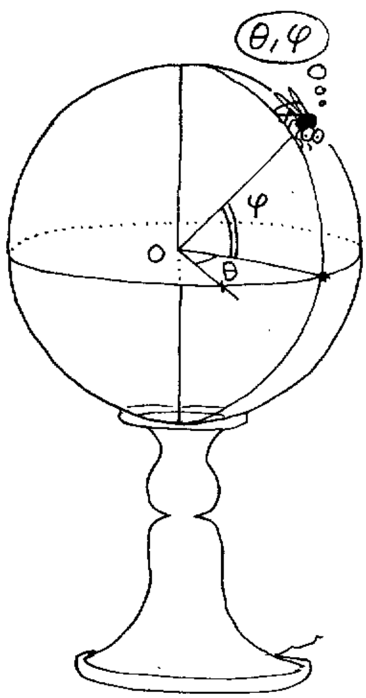
Oni kutimas diri, ke nia spaco,
se oni esceptas la tempon, havas tri dimensiojn.





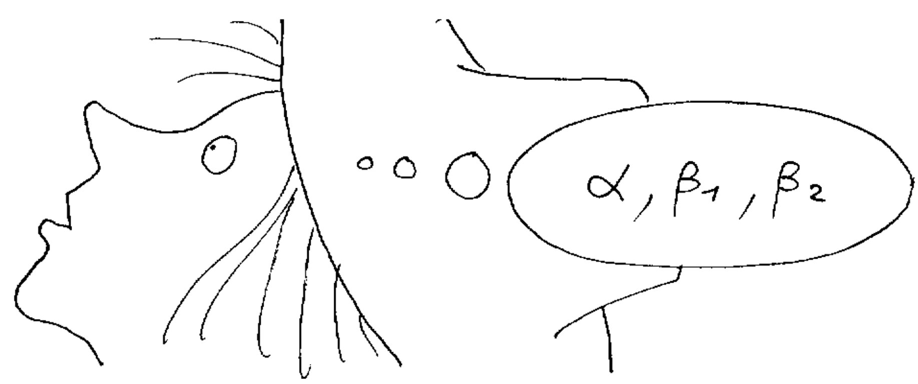
Anselmo lokalizas objektojn rilate al lia korpo, lia cerbujo. La pozicion de punkta objekto oni konas per tri ANGULOJ : la altangulo α kaj la azimutaj lokigiloj β_1 and β_2 de liaj du okuloj. La angula diferenco $\beta_1 - \beta_2$ nomiĝas PARALAKSO. En la Anselma cerbo okazas malkodado, kiu eltiras el tiu paralakso distancon

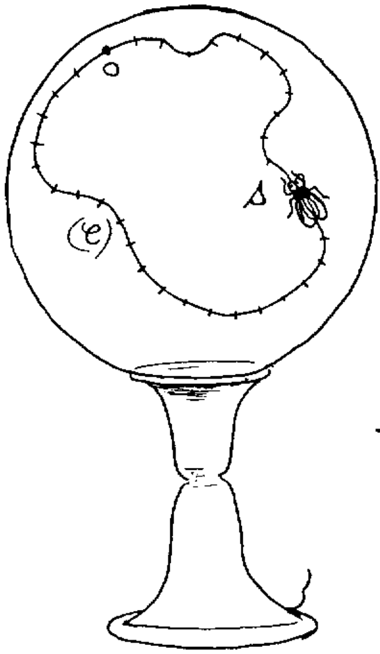
LA MERGIĜO :



Sed la muŝo delokiĝas sur la lampa sfera globo, kie ĝian pozicion, en tiu du-dimensia spaco, oni povas lokalizi per du anguloj θ kaj φ (longitudo kaj latitudo).

Ni diros, ke tiu dudimensia spaco MERGIĜAS en en la tridimensia spaco nia.

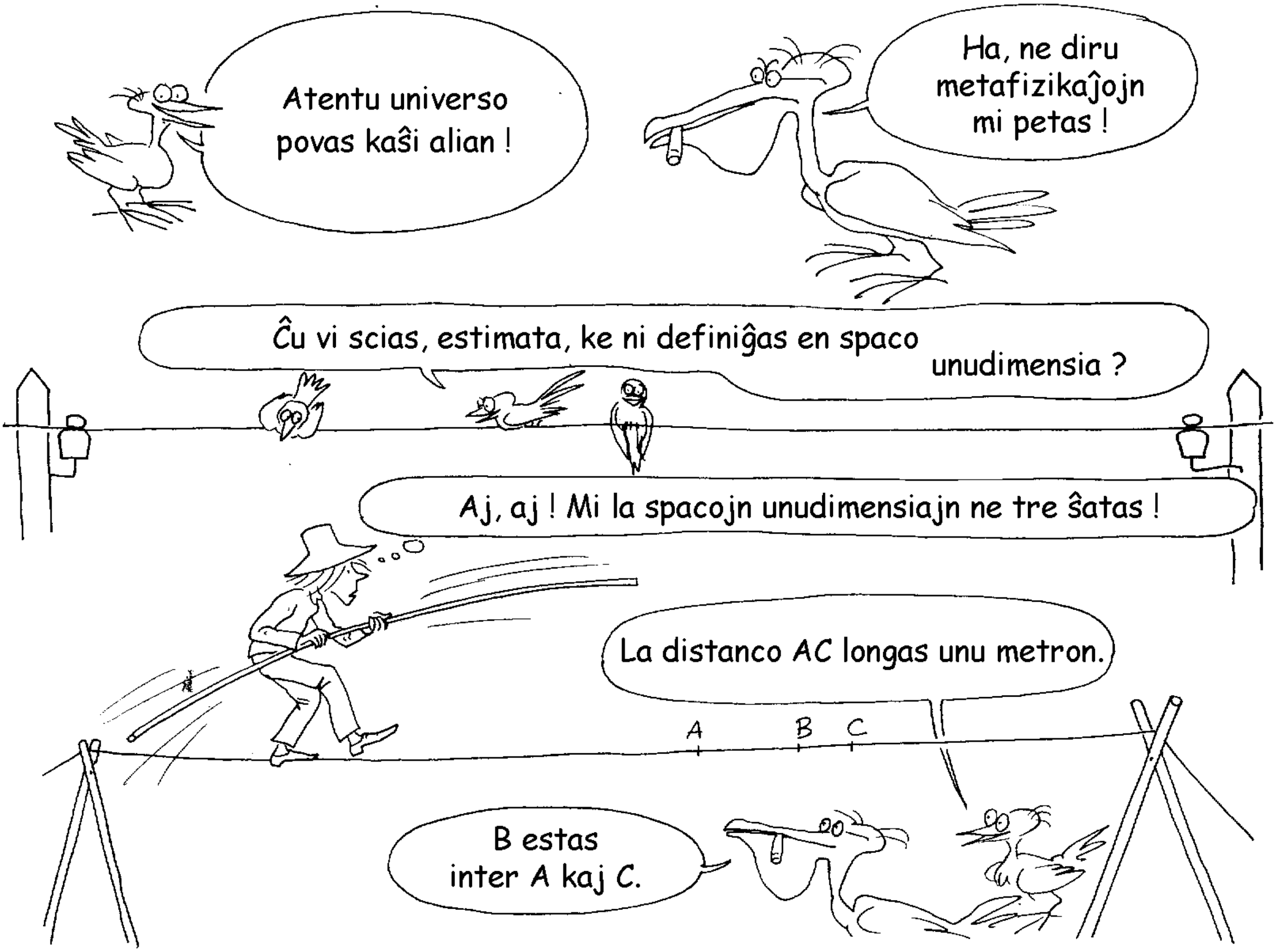


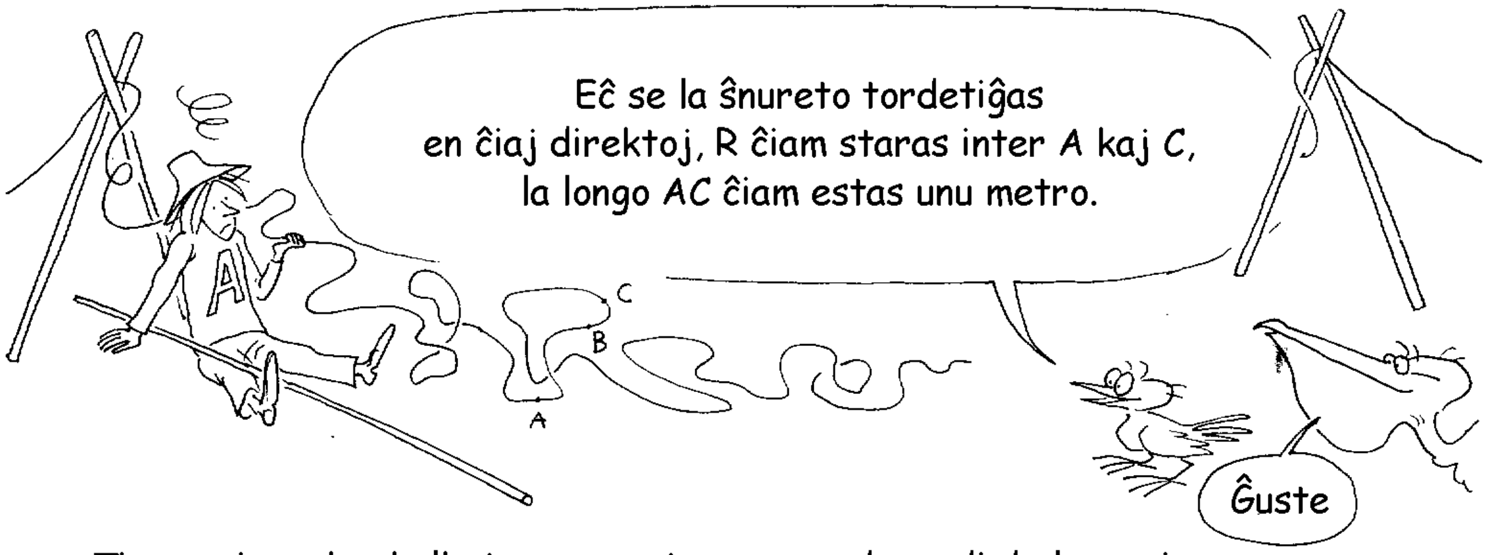


Ni supozu : la muŝo sekvas kurbon (φ) sur la sfero.
Oni povos lokalizi ĝian pozicion per unu koordinato
(ĝia distanco s al devena punkto algebre kalkulita)

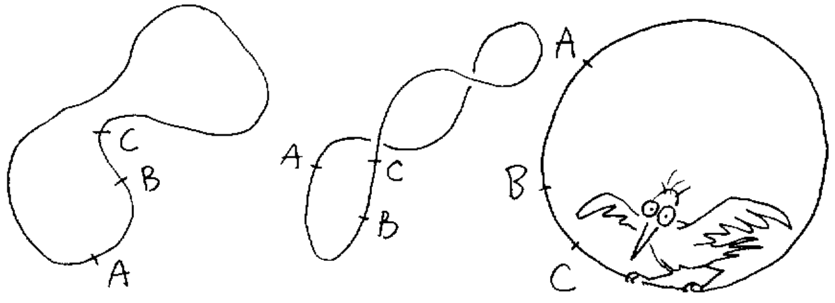
Kurbo estas bildigo de UNUdimensia spaco.

Tiu spaco mergiĝas en en iu dudimensia (sfero),
ĝi mem MERGIĜAS en tridimensia spaco.
Tiel la spaco, kie ni moviĝas, povus mergiĝi en spaco kun supera dimensio-nombro sen, ke ni konsciu pri tio.





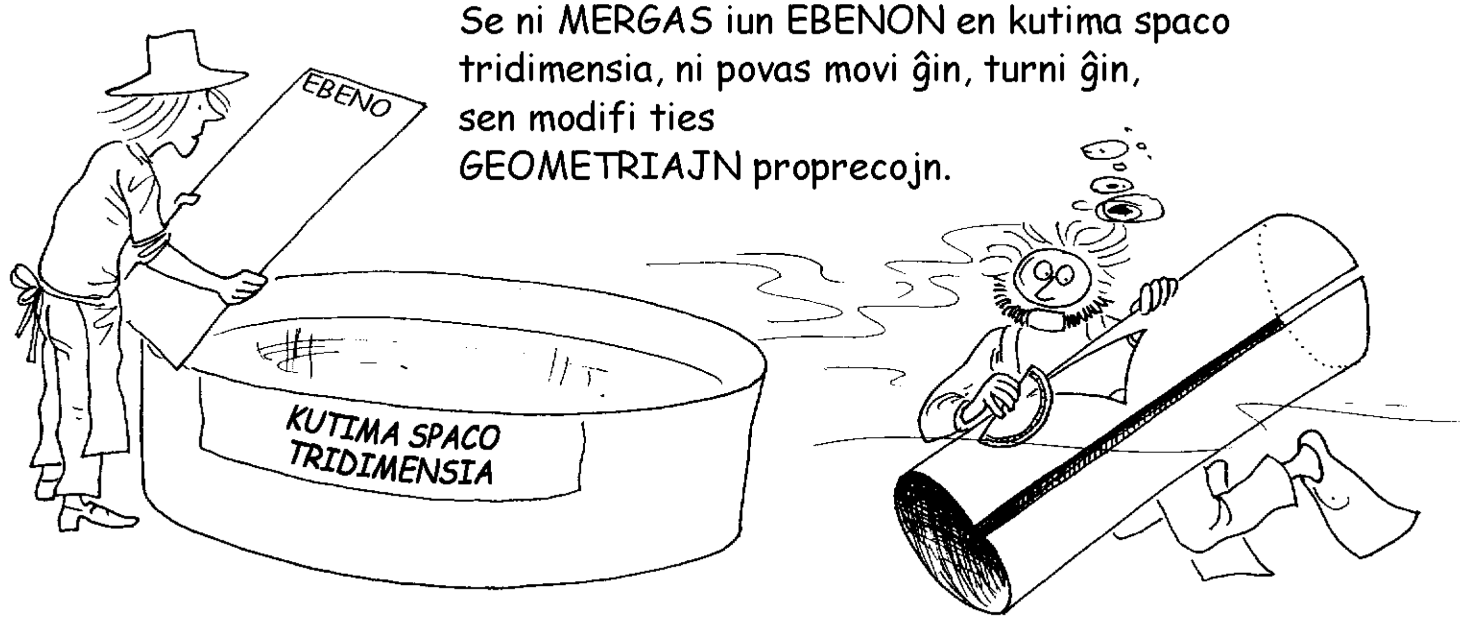
Tio pensigas, ke kelkaj proprecoj povas sendependi de la maniero,
kiel efektiviĝas la mergiĝo.



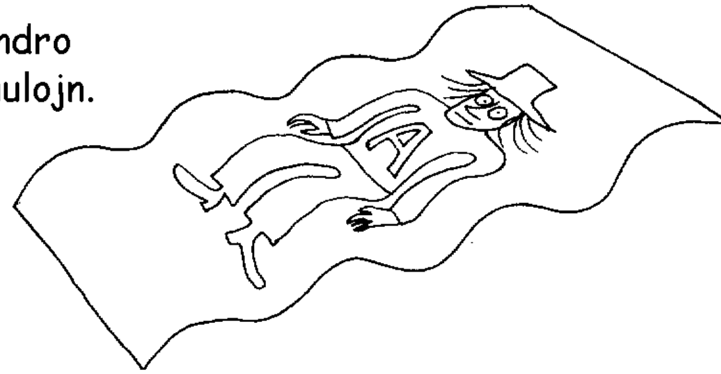
Jen diversaj manieroj MERGI iun FERMITAN KURBON en la kutima spaco. Tiu FERMO estas propreco sendependa de la mergiĝo.

Sed ni nin bone gardis el plilongigi aŭ kuntiri la ŝnureton,
por ne modifi la LONGOJN inter su sinsekvaj punktoj.
Nun ni MERGOS iujn SURFACOJN en la kutima tridimensia spaco.

Se ni MERGAS iun EBENON en kutima spaco tridimensia, ni povas movi ĝin, turni ĝin, sen modifi ties GEOMETRIAJN proprecojn.

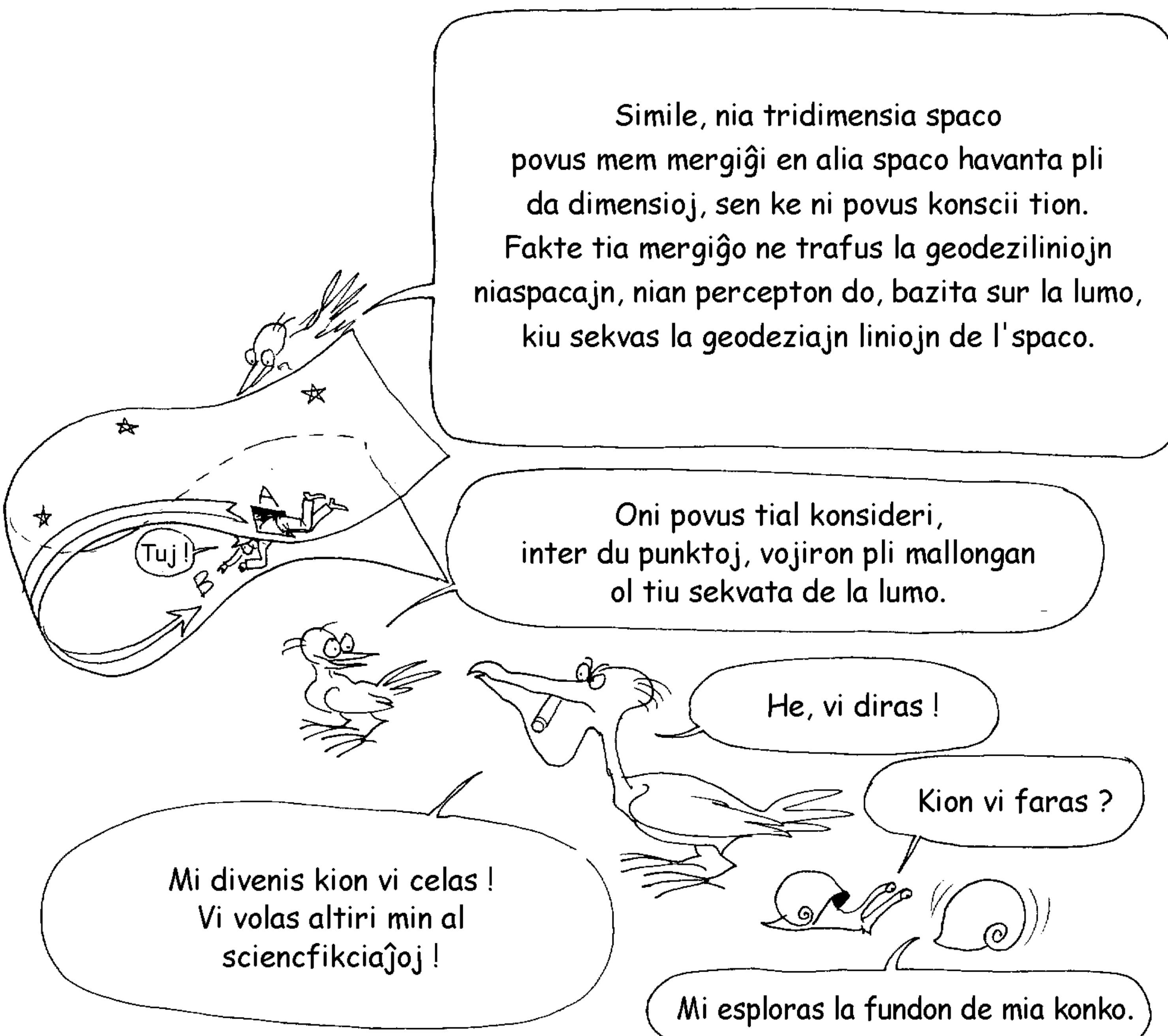


Ni vidis, ke deformi ebenaĵon laŭ cilindro ne modifis la geodeziliniojn, nek l'angulojn.

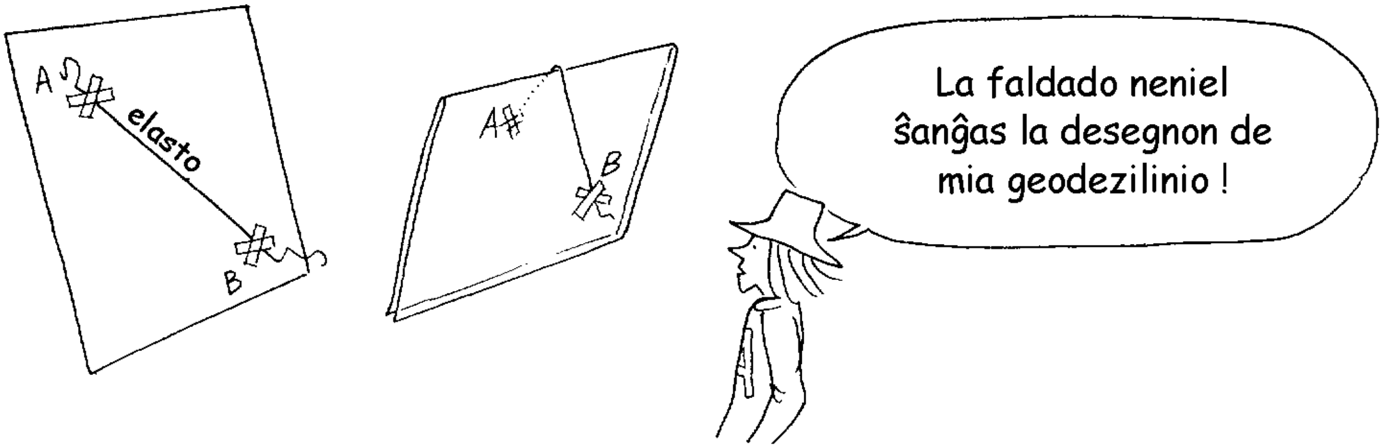


Laŭ tiu vidpunkto, onda lado ĉiam geometriumas kiel EBENO EŬKLIDA.

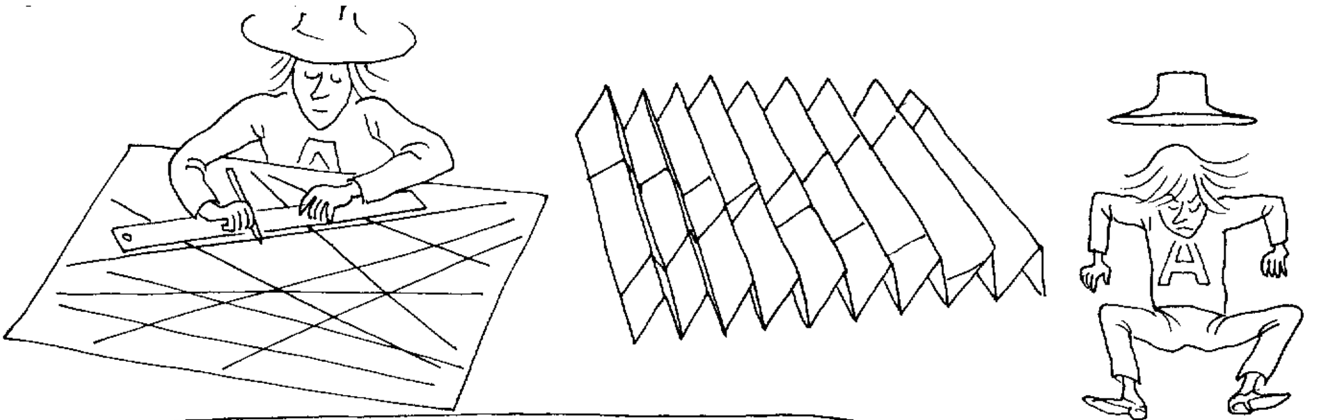
Loĝanto de tia dudimensia spaco, Eŭklida, neniel konscius pri la translacioj, rotacioj aŭ ondadoj, kiuj estas nur varioj de la tipo de mergiĝo en la tridimensia spaco.



Ni prenu eron el ebeno kaj faldu ĝin :



Sur paperfolio, helpe de rektilo, desegnu tutan aron da rektoj, geodezilinioj, poste ĉifu la folion. Sub viaj okuloj vi plu havos senŝanĝe la geodeziajn liniojn de la surfaco, kun aŭ sen faldoj !



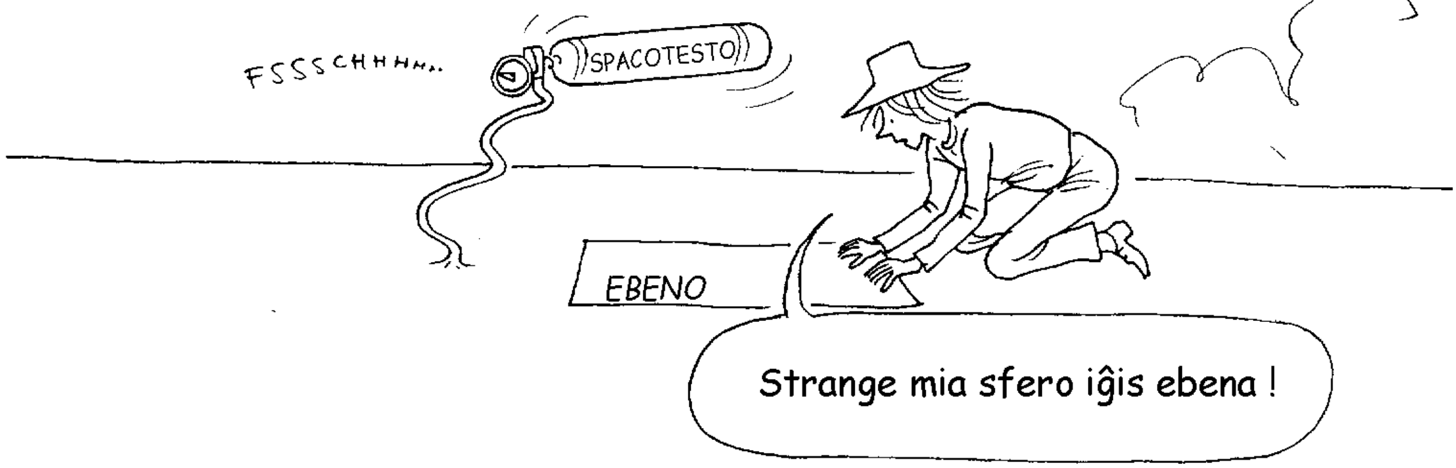
Sinjoro Lanturlup' ?
Mi estas la vojaĝanta komizo de la firmao Eŭklido kaj K-io. Ni scias, ke vi suferis hm ... malagrablaĵojn uzante nian materialon.
EŬKLIDO K. K-IO
Certe
Mi havas ĉi tie novajn artiklojn kiuj, ĉifoje, devus doni al vi plenan kontenton.
Montru.
La estonteco estos tridimensia. Dudimensia geometrio estas, nu iom ... pretertempa.
KOSMA FLUIDAĴO SPACO-TESTO
Jen nia nova ilaro por geodezilinioj ...
... kiu konsistas el rigidaj stangoj perfekte alĝustigeblaj unu al la aliaj.
Kiuj permesos al vi iri nek dekstren nek maldekstren, nek alten nek malalten... sed TUTREKTEN


Por mezuri surfacojn, uzu tiun farbon, po cent gramoj sur unu kvadrata metro, ekzakte.
Sagaca !
Por la mezuro de volumeno, plenigu tiun ĉi per gaso. Vi rekte legas la valoron sur la flumezurilo de la SPACOTESTO.
kaj bone memoru : sfera surfaco : $4\pi\ell^2$, volumeno $4/3\pi\ell^3$.
Konsentite.
Aĉa metio !
Anselmo alteriĝis ĉifoje en tridimensia spaco kaj ni nun sekvos lin en lia esploro.

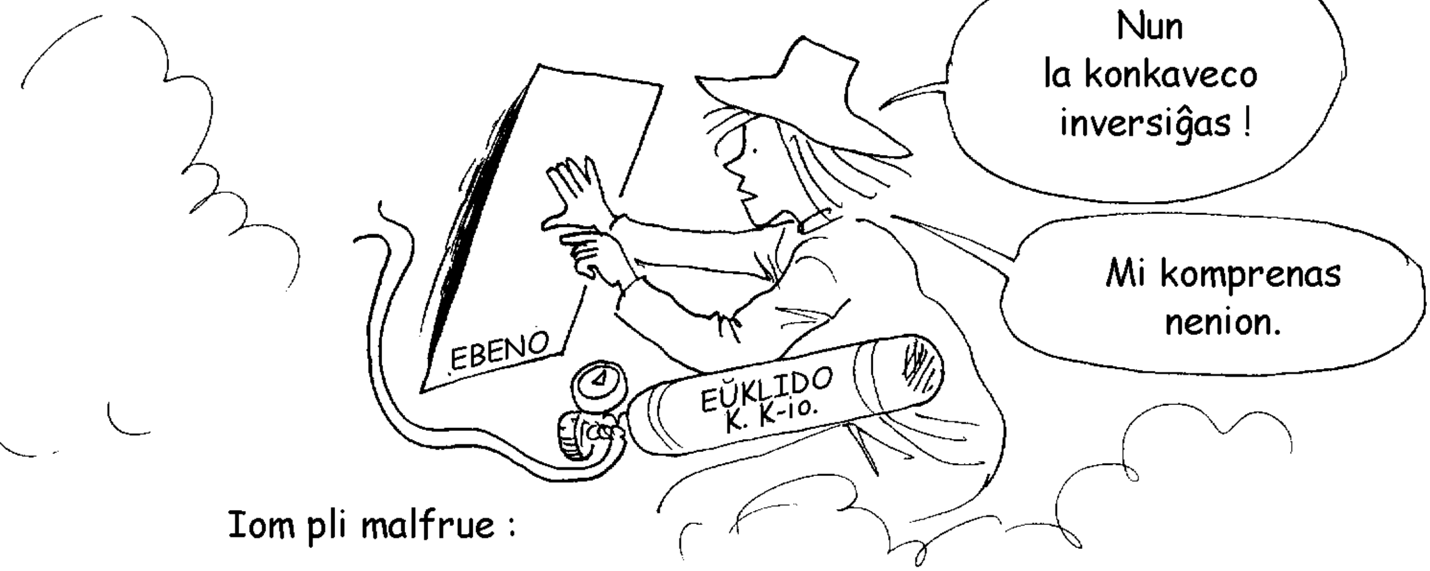

Bela ilaro.
Kaj tiuj stangoj longas ekzakte unu metron.
Sed alĝustiginte solidan kvanton da stangoj ...
Jen la sama afero !
Mia geodezia linio fermiĝas sur si mem !
Tridimensia spaco fermita ?
Finiĝas ĉio
Anselmo, kiu haltis, por manĝi ion sur planedeto, decidis reveni al la angulmezura metodo.
Kiel antaŭe, mi uzos tri GEODEZILINIOJN por konstrui TRIANGULON.
EŬKLIDO K. K-io.

?!?
Miaj geodezilinioj ĝuste juntas, kaj tamen la sumo de miaj tri anguloj superas 180° !
Bone...
SPACOTESTO
FSCHHHHHHHH
Mi elfaros unu, kaj mi mezuros ties volumon kaj surfacon
Sfero kun radiuso ℓ estas l'aro de la punktoj situantaj je distanco ℓ de fiksa punkto, kiun mi nomos N
La surfaco malsuperas 4πℓ²...
Jen jam la volumeno malsuperas 4/3πℓ³ !
Denove oni trompis min.

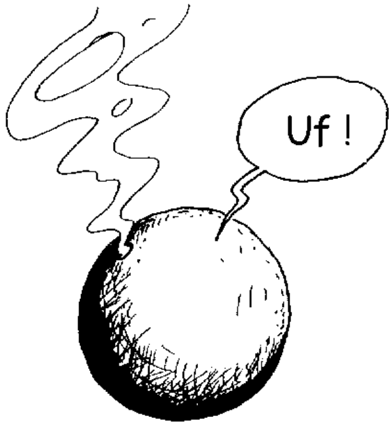
Anselmo ankoraŭ pligrandigas la sferan radiuson !



Ankoraŭ kaj ankoraŭ ...



Iom pli malfrue :



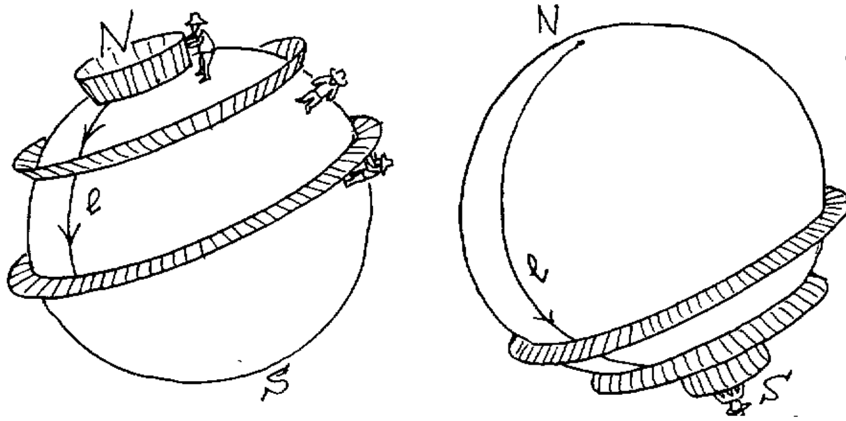
Tial ŝveligante simplan balonon en tridimensia spaco, Lanturlup' fine trovis sin INTERNE ... de ĝi !

Se li ne estus ĉesiginta la gasan elfluon el la botelo, li pereus per dispremado, tutsame kiel li trovis sin enfermata de lia ĉirkaŭbarilo, en la paĝo 13.

Eĉ kun pleja bonvolo, oni ne plu povas nun VIDEBLIGI la KURBECON de tiu tridimensia spaco. Ĝiaj geoderiliioj fermiĝas, kaj ĝia volumeno prezentas nur FINIAN kvanton da kubaj metroj, same kiel la surfaco de nia planedo, kiu ankaŭ fermiĝas kvantas FINIAN nombron da kvadrataj metroj.

La sumo de la anguloj de triangulo de tiu tridimensia spaco superas 180°. Por KONSCII ĝian kurbecon, necesus havi kapablon percepti en kvar dimensioj.

Jes ja, oni ĉiam povas pensi, ke nia tridimensia UNIVERSO estas HIPERSURFACO, kiu mergiĝas en spaco kvardimensia, kiu meme eble estas hipersurfaco mergita en spaco kvindimensia, ktp ...
Sed niatempe, ne estas bontona diri tiajn aferojn.



Sur lia sfero, pligrandigante la radiuson ℓ de sia bieno, Lanturlup' fine troviĝis en la antipodo S de l'punkto N, centro de sia cirklo, kaj sufokata per sia propra ĉirkaŭbarilo.

En la tridimensia spaco pozitive kurba, sama afero.
En tiu dudimensia spaco, kio estas la sfero, Anselmo renkontis la EKVATORON kiam li estis ĉirkaŭbarinta la duonon de la disponebla sufaco. Ankaŭ en tridimensia spaco HIPERSFERA ekzistas EKVATORO.
Anselmo ĝin atingas, kiam sia balono okupas la duonon de la disponebla volumeno. Sur la sfero, la ekvatora cirklo aperis al li kiel REKTO. Simile, en la la hipersfera spaco, la « ekvatora balono » havos por li aspekton de EBENO.

Trans la ekvatoro la KONKAVECO de la balono inversiĝas, kaj ĝi aŭtomate centras sin sur S, la punkto antipoda de la punkto N centro de l'balono.

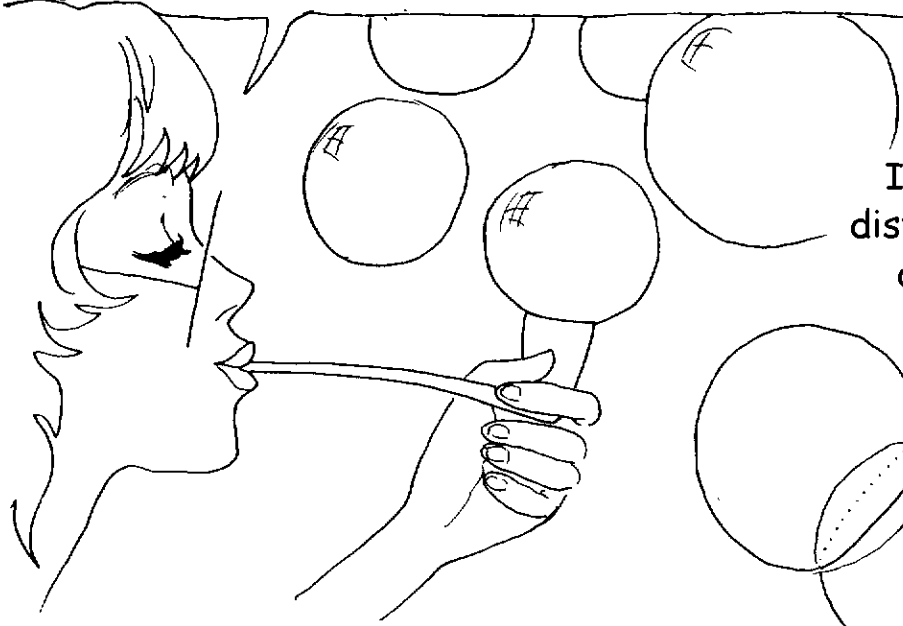

Ĉu problemoj ?
Tio estas, hm … Ĉio iom miksiĝas en mia cerbo.
Mi nomiĝas Sofio,
mi estas sperta pri ĉies kurboj.
Krozado en la hipersferoj
estas ĉiam iom surprizveka
komence. Oni evitu angori.
Iom post iom oni alkutimiĝos.
jes …
Mi iom perdis la penslinion …


sed kie situas la CENTRO de tiu hipersfero ?
Se mi desegnas cirklon sur EBENO, vi konsentas ke tio estas bildigo de spaco unudimensia fermita, MERGITA en spaco dudimensia : EBENO.
Kaj la centro de l'cirklo NE TROVIĜAS sur la cirklo.
Hm...
Sfero bildigas fermitan spacon DU-dimensian, MERGITA en spaco TRI-dimensia. Ankaŭ la centro de la sfero NE TROVIĜAS sur la sfero. Ĝi estas en la tridimensia spaco.
La centro de spaco hipersfera tridimensia, povus troviĝi en spaco kvardimensia, supozante, ke ĝi MERGIĜUS en ĝi. Kaj simile plu ...Tial la centro de spaco hipersfera kvardimensia troviĝus en spaco kvindimensia, ktp ....

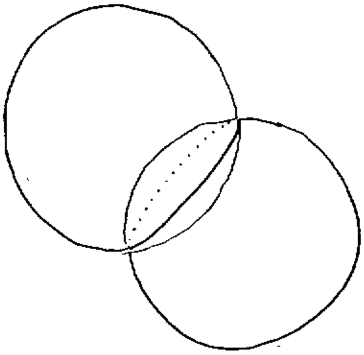

N.
Vidu, jen vi, denove, en via dudimensia mondo, alpreme gluita, kiel eta transigobildo.
Kaj vi komencas ŝveligi vian cirklon, kiu estas ĉi tie sfero unudimensia...
N.
En spaco dudimensia, limo dispartigas surfacon. Dum en spaco tridimensia, ĝi dispartigas volumenon.
Tie estas kiam mi alvenas ĉe la duono de tiu sfera sapco.
En spaco kvardimensia limo havus tri dimensiojn, kaj determinus hipervolumon kvardimensian.
Denove li deliras !
ni forfuĝu !
N
Rigardu tie-ĉi vian cirklon, kiu estas « balono kun unu dimensio » komencas enteni pli ol la duono de la disponebla spaco. Ĝi komencas fermiĝi ĉirkaŭ vi, konverĝante al la antipoda punkto S.
S

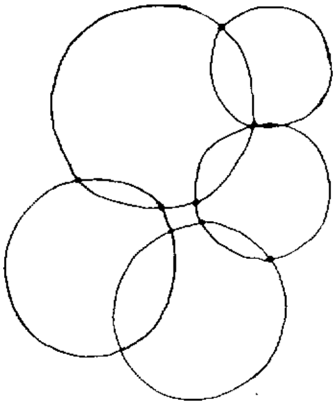

Same en mia kurba spaco tridimensia, kiam mi enŝprucigas pli ol la duono de la totala volumeno, la balono fermiĝas ĉirkaŭ mi, konverĝante al la antipoda punkto.
Ĉar la sfero, en tiu tridimensia kurba spaco, memekompreneble posedas du centrojn, kiuj estas antipodaj.
Mi komprenis !
?!!?
fakte mi ne ekzakte scias, kion mi komprenis, sed mi sentas la impreson, ke mi komprenis ion.
Kia angoro !
Tute ne, anselmo, kiam estas pli ol tri dimensioj, KOMPRENI ESTAS EKSTERPOLI.
Mi faras eksterpolon sen ĝin scii !
La desegnon, vi elpensos... en via cerbo !

Nun mi prenas tridumensian spacon,
kie mi metas dudimensiajn sferoj, multege da dudimensiaj universoj.



Tiuj universoj povas interpenetri unu la alian. Iliaj komunaj punktoj distribuiĝas laŭ cirkloj, objektoj dudimensiaj.

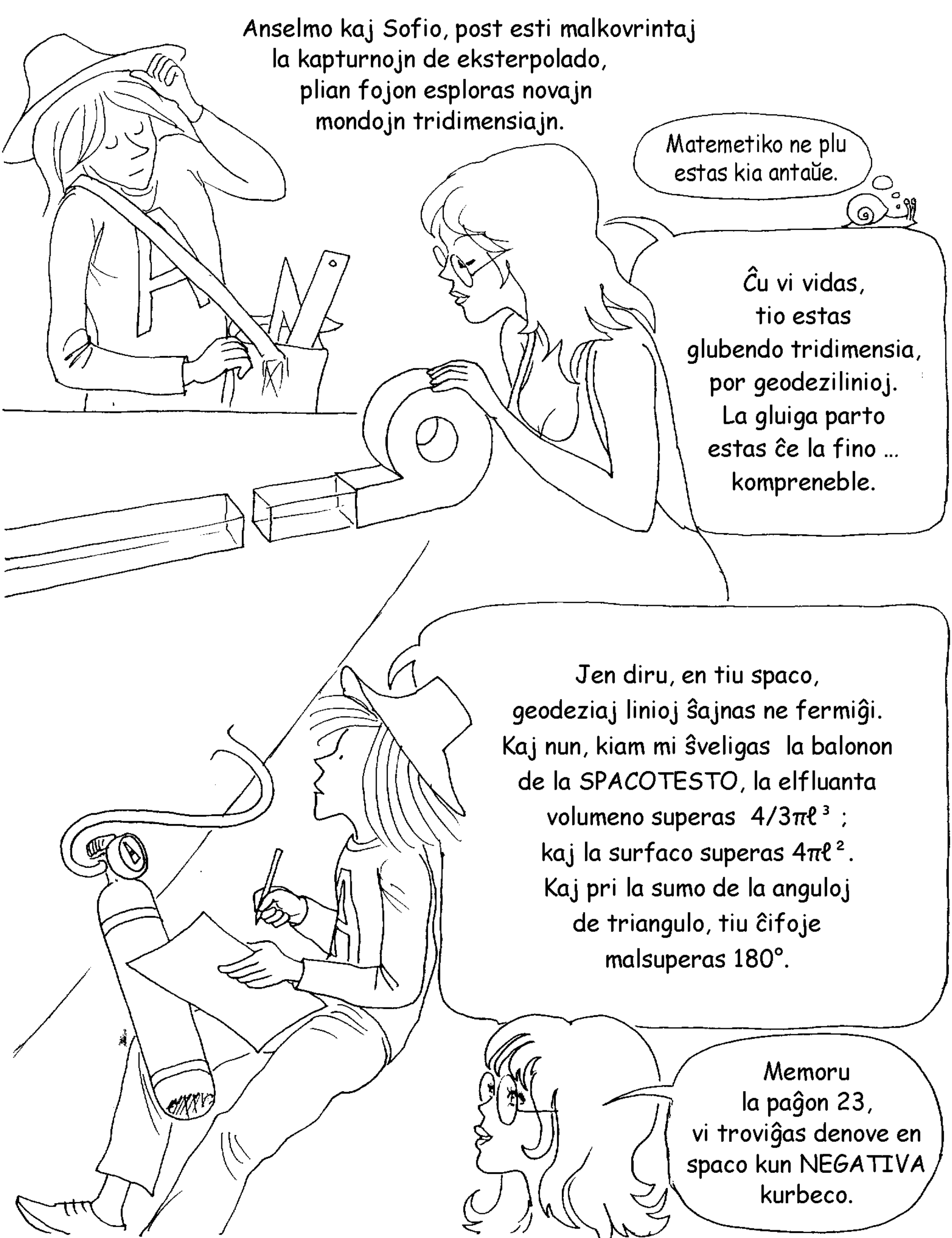




Simile, cirkloj, objektoj unudimensiaj, lokitaj sur paperfolio (dudimensia) sekciiĝus laŭ PUNKTOJ. (Oni kutimas diri, ke punkto estas nuldimensia.)

Sferon oni tiam povos rigardi kiel intersekco de du tridimensiaj « vezikoj », disvolviĝantaj en spaco kvardimensia.

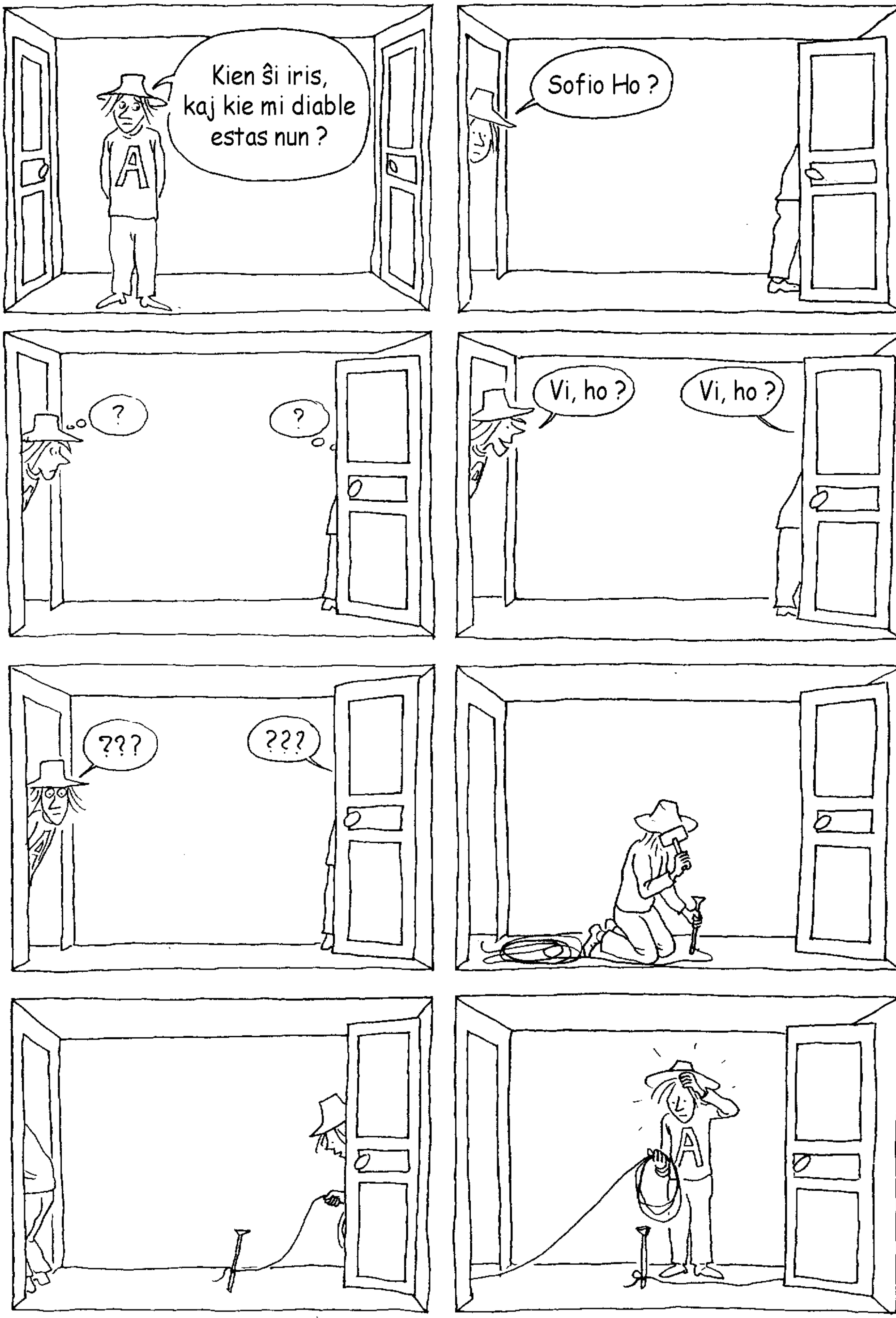
Kaj tiel plu : kurba spaco tridimensia, hipersfera, mem povos esti rigardata kiel intersekco de du vapvezikoj kvardimensiaj, disvolviĝantaj en spaco kvindimensia.

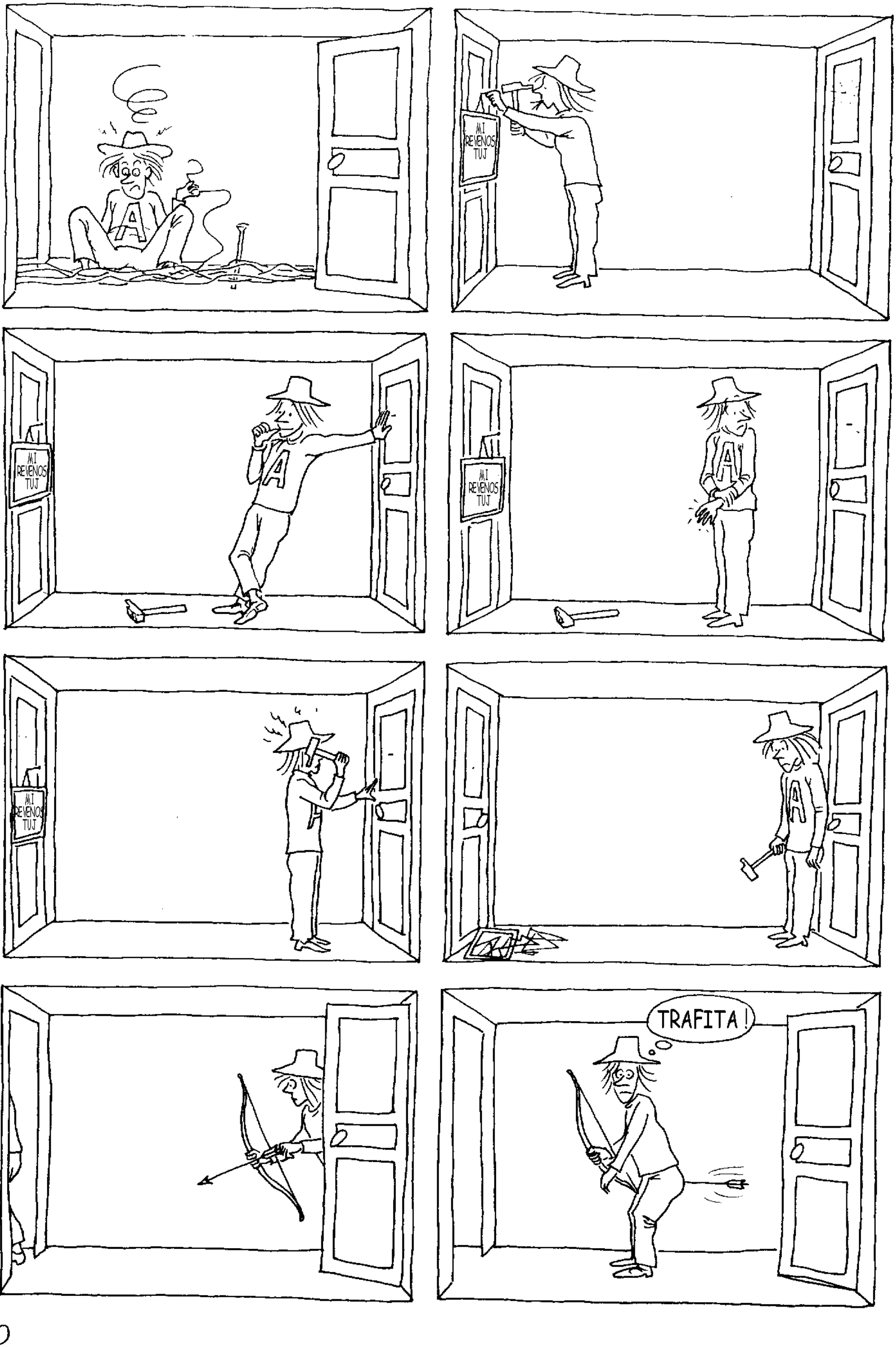

Anselmo kaj Sofio, post esti malkovrintaj la kapturnojn de eksterpolado, plian fojon esploras novajn mondojn tridimensiajn.
Matemetiko ne plu estas kia antaŭe.
Ĉu vi vidas, tio estas glubendo tridimensia, por geodezilinioj. La gluiga parto estas ĉe la fino ... kompreneble.
Jen diru, en tiu spaco, geodeziaj linioj ŝajnas ne fermiĝi. Kaj nun, kiam mi ŝveligas la balonon de la SPACOTESTO, la elfluanta volumeno superas $4/3\pi\ell^3$; kaj la surfaco superas $4\pi\ell^2$. Kaj pri la sumo de la anguloj de triangulo, tiu ĉifoje malsuperas 180°.
Memoru la paĝon 23, vi troviĝas denove en spaco kun NEGATIVA kurbeco.

RESUMO :

En la tridimensiaj spacoj, multaj aferoj povas okazi, vi scias. Kiel pri surfacoj, kiuj estas spacoj kun du dimensioj. Do se la sumo de la anguloj de TRIANGULO, en tridimensia spaco, superas 180°, ni diras, ke la kurbeco estas pozitiva. Se vi formas en ĝi sferon kun radiuso ℓ, vi trovos, per la SPACOTESTO volumenon malsuperan je $4/3\pi\ell^3$ kaj surfacon malsuperan je $4\pi\ell^2$. Tio spaco kvalifita je HIPERSFERA, meme fermiĝos. Se la sumo de la anguloj de triangulo, en tridimensia spaco, malsuperas 180°, tiam la kurbeco estas negativa. La volumeno de sfero kun radiuso ℓ superas $4/3\pi\ell^3$ kaj ties surfaco superos $4\pi\ell^2$. Tiu spaco havos amplekson nefinian.

NECESAS KE SPACO ESTU APERTA AŬ MALAPERTA !


Kien ŝi iris,
kaj kie mi diable
estas nun ?
Sofio Ho ?
?
?
Vi, ho ?
Vi, ho ?
???
???

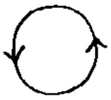

MI REVENOS TUJ
MI REVENOS TUJ
MI REVENOS TUJ
MI REVENOS TUJ
TRAFITA!

He jes - Lanturlup' estis sendita en tridimensian spacon cilindran. Kvankam eŭklida, sen kurbeco (la sumo de la anguloj de triangulo tie egalas 180°) tiu mondo fermiĝas sur si mem.
TRAFITA
Bone, ni konsentu ... Sferaj mondoj, hiperbolaj, cilindraj. Ni plene ĉirkaŭiris la temon, ĉu ne ?
GEOMETRIO
Ĉu vi kredas ?
Ni revenu iomete al la dudimensia.
Ej !
NUBOJ

DE KAP' AL PIEDO :

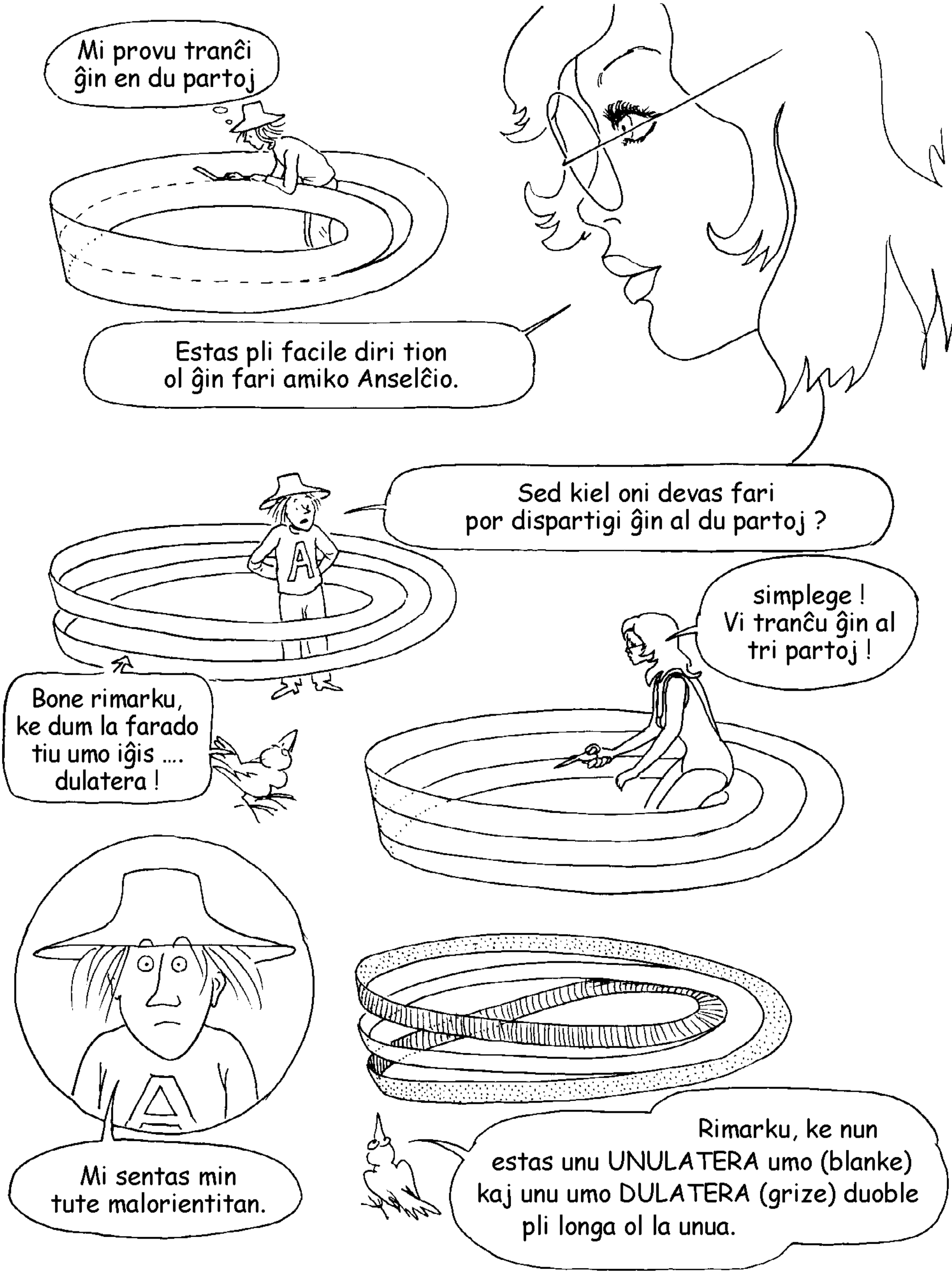

Tio fermiĝas, kiel antaŭ tempo.
Sumo de la anguloj 180° Estas eŭklida tiu umo. Ankoraŭfoje cilindraĵo !
Nu, ne !...
!?!
Nekompreneble !
Por ĉion klarigi, Anselmo tiufoje retroviĝis en SPACO DUDIMENSIA NEORIENTEBLA. La plej konata bildo de tia spaco la rubando de Möbius (1830). L'ideo eskapis al la grekoj, kiuj tamen pensis je ĉio.
STARTOPUNKTO DE LA GEODEZILINIO
Sofio, eligu min el tie !

Ni desegnu cirklon sur surfaco, kaj per sago determinu arbitre direkton.



Ni imagu, ke la cirklo estas malgranda transigobildo,
kiun ni povas ŝovi laŭvole sur la surfaco.

Se la cirklo retroviĝas identa, ni diros, ke tiu surfaco estas ORIENTEBLA (tio estas la kazo por sfero, cilindro, ebeno, ktp ...). Sed se tiu transigobildo glitas sur rubando de Möbius, l'afero okazas tute alie :

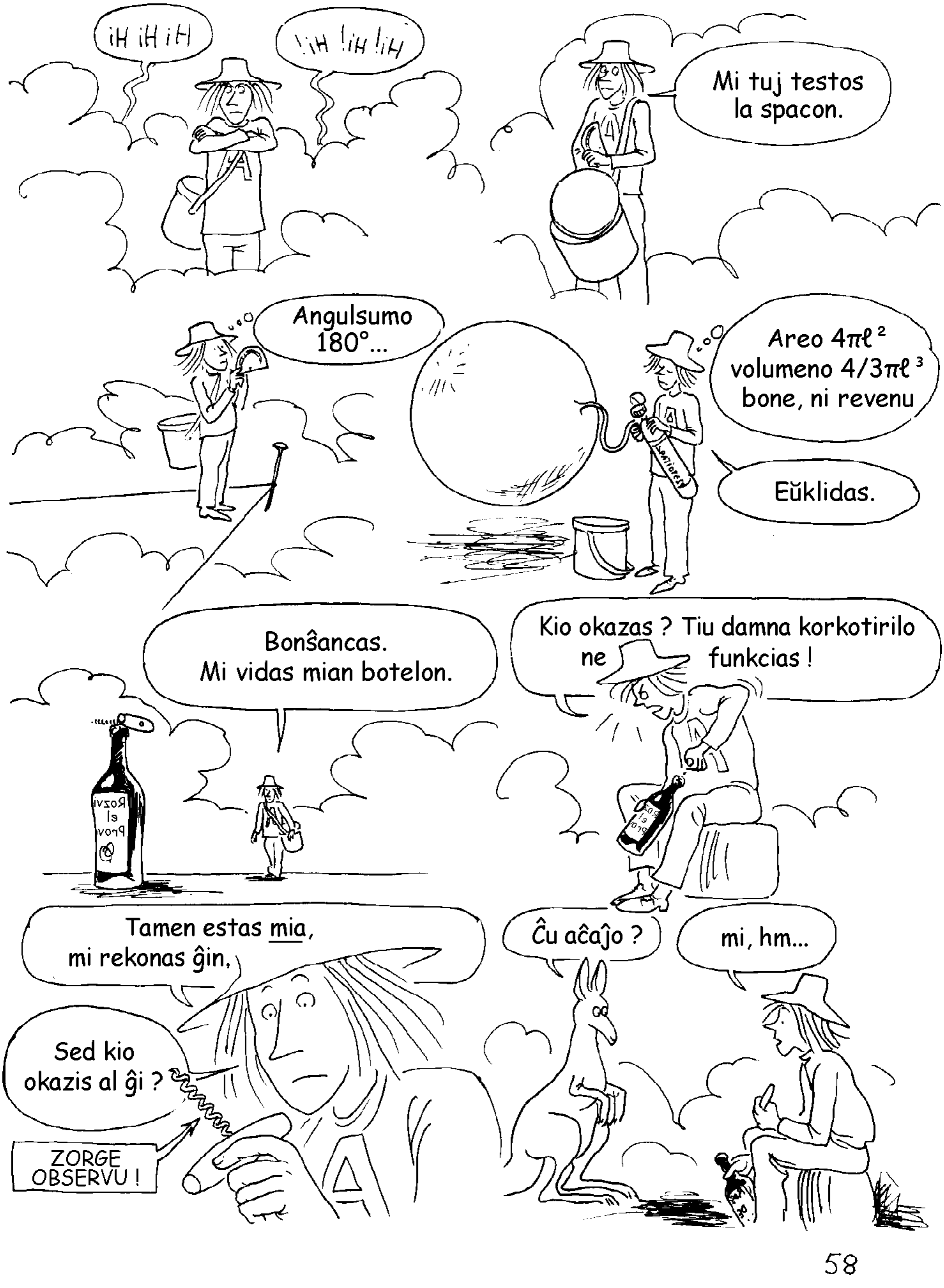


Mi provu tranĉi ĝin en du partoj
Estas pli facile diri tion ol ĝin fari amiko Anselĉio.
Sed kiel oni devas fari por dispartigi ĝin al du partoj ?
simplege ! Vi tranĉu ĝin al tri partoj !
Bone rimarku, ke dum la farado tiu umo iĝis .... dulatera !
Mi sentas min tute malorientitan.
Rimarku, ke nun estas unu UNULATERA umo (blanke) kaj unu umo DULATERA (grize) duoble pli longa ol la unua.

Post tiu promenado sur la rubando de Möbius,
ni revenu en la eŭklidajn spacojn (sen kurbeco) tridimensiajn.

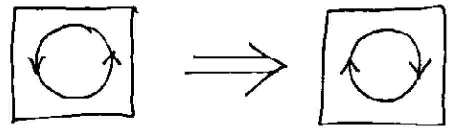
ORIENTIGO DE LA SPACO :

Ni akompanu Lanturlupon en lia esplorado de nova mondo tridimensia eŭklida (sen kurbeco)

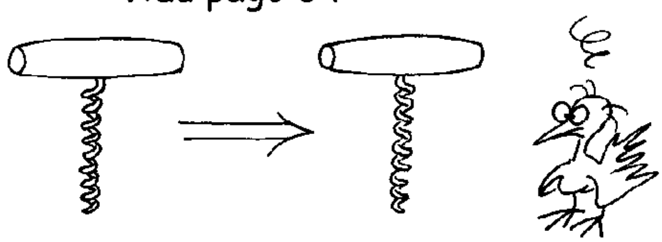

Mi tuj testos la spacon.
Angulsumo 180°...
Areo 4πℓ²
volumeno 4/3πℓ³
bone, ni revenu
Eŭklidas.
Bonŝancas. Mi vidas mian botelon.
Kio okazas ? Tiu damna korkotirilo ne funkcias !
Tamen estas mia, mi rekonas ĝin,
Sed kio okazis al ĝi ?
ZORGE OBSERVU !
Ĉu aĉaĵo ?
mi, hm...

Estas rozvino el Provenco, kies kvalito sufiĉe ordinaras, entute ...
Ĉu vi havas korkotirilon ?
Hm ... jes
Nia diligenta kanguruaro - En laboro paca ne laciĝos
BLUB BLUB BLUB
Ĉu vi ne rimarkis ion nenormalan ?
Ne, vi aspektas iom malsaneta, jen ĉio
Prenu du kapsulojn da Krokodeino® de l'laboratorioj Zam & Hof.
Bonan kontinuecon !
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
Iu misformaĉas mian korktirilon ... Kaj drinkema kanguruo ŝtelas mian rozvinon. Kion tiu afero signifas ?
Fikiĝu !
SBLING !
NI NE POVAS TRO INSTIGI VIN OBSERVI TIUN KORKTIRILON PLEJ ZORGE.

La rubando de Möbius (spaco neorientebla dudimensia) havas do ekvivalenton tridimensian.
Sur la rubando de Möbius, kiam la cirklo ĉirkaŭiris laŭ tiu eŭklida spaco, ĝia orientiĝo ŝanĝis :



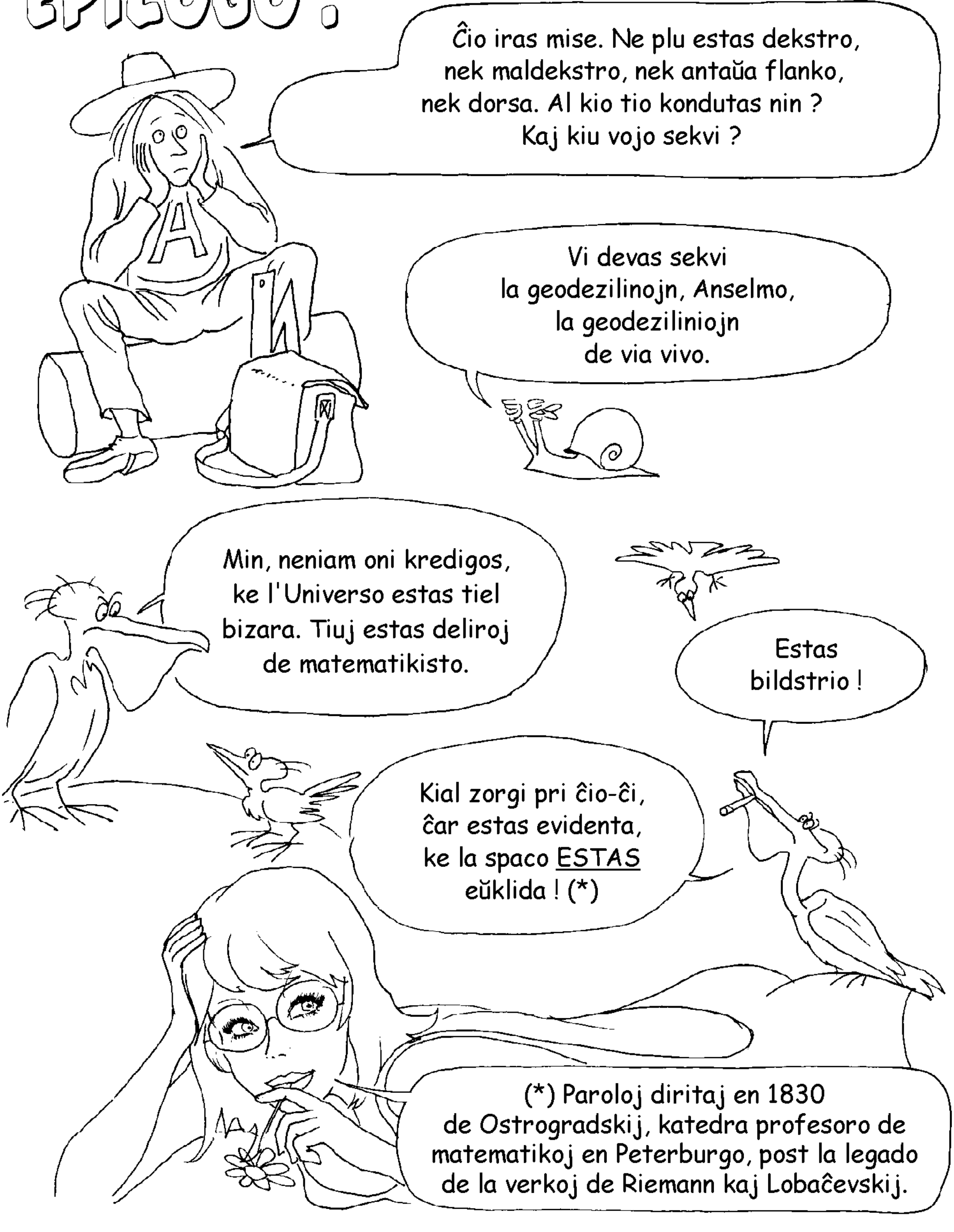
Vidu paĝo 54



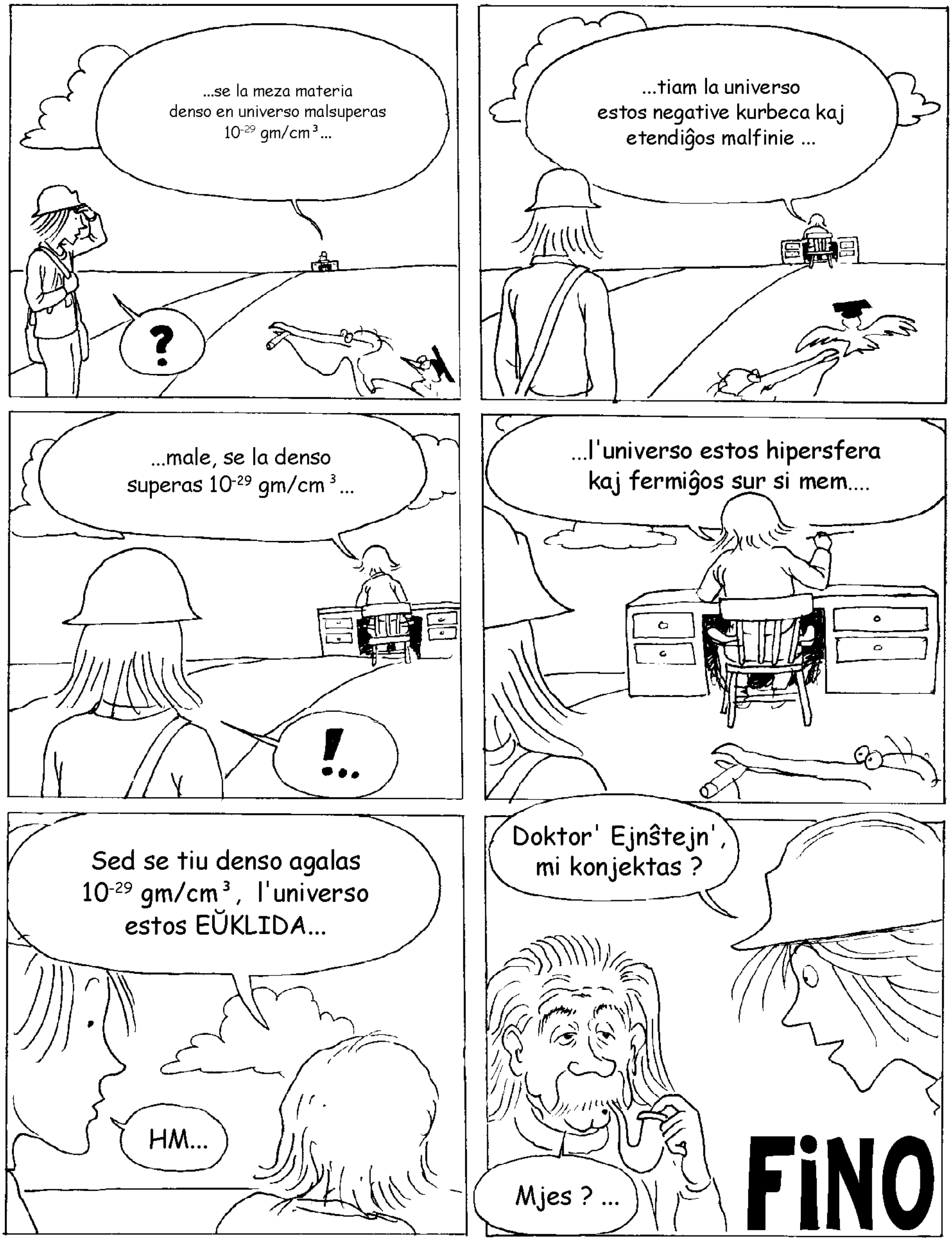
Oni rimarkos, ke tiuj korktiriloj aspektas kvazaŭ unu estus la enspegula bildo de l'alia.
La koktirilon, aŭ Anselmon mem, oni povas rigardi kiel « transigobildojn tridimensiajn ». Ĉiufoje,kiam objekto ĉirkaŭiras laŭ tiu spaco tridimensia, ĝia orientiĝo inversiĝas. Tial ke oni supozas nin akompanantaj Lanturlupon en sia periplo ĉirkaŭspaca, estas normale, ke ni retrovas kun li la botelon « spegule » kaj la kortirilon ŝraŭbanta laŭ malkutima direkto.
Se ni reĉirkaŭirus, en tiu universo, tio redonus al ni la komencan vidadon de l'aĵoj (kondiĉe, ke ni lasu la objektojn sialoke).

Anselmo kaj la kanguruo (de la speco de l'antipodanoj) loĝas en la sama spaco, sed ili diferencas, ĉar kio estas ĝustdirekta por la kanguruo estas malĝustdirekta por Lanturlup' kaj reciproke.

EPILOGO :


Ĉio iras mise. Ne plu estas dekstro, nek maldekstro, nek antaŭa flanko, nek dorsa. Al kio tio kondutas nin ? Kaj kiu vojo sekvi ?
Vi devas sekvi la geodezilinojn, Anselmo, la geodeziliniojn de via vivo.
Min, neniam oni kredigos, ke l'Universo estas tiel bizara. Tiuj estas deliroj de matematikisto.
Estas bildstrio !
Kial zorgi pri ĉio-ĉi, ĉar estas evidenta, ke la spaco ESTAS eŭklida ! (*)
(*) Paroloj diritaj en 1830 de Ostrogradskij, katedra profesoro de matematikoj en Peterburgo, post la legado de la verkoj de Riemann kaj Lobaĉevskij.


Ni supozu, ke Universo ne similus al tio, kio ĝi estas. Ĉu vi imagas ĉion tio instuita en la lernejoj ?!!...
Katastrofo !
kaj poste, kio gravas, estas la vivo. Kaj en la ĉiutaga vivo, vi konsentos kun mi, ke ...
Sed kio kuŝas malantaŭ ĉio tio ?
La FIZIKO, karulo mia...
Mi VOLAS klarigi tion !
Antaŭen en la KONKRETA.
Ĉu estas iu ?



...se la meza materia denso en universo malsuperas 10^{-29} gm/cm^3...
?
...tiam la universo estos negative kurbeca kaj etendiĝos malfinie ...
...male, se la denso superas 10^{-29} gm/cm^3...
!..
...l'universo estos hipersfera kaj fermiĝos sur si mem....
Sed se tiu denso agalas 10^{-29} gm/cm^3, l'universo estos EŬKLIDA...
HM...
Doktor' Ejnŝtejn', mi konjektas ?
Mjes ? ...
FiNO