

Bardhyl Adem Selimi

**Amuziĝu per matematiko
Dua parto**

(libro por la mezlernejanoj)

Scienca redaktoro Bardhyl Qirjaku

Eldonejo

Tiranë, januaro 2009

Anstataŭ la enkonduko

Ĉu matematiko estas malfacila?¹

La plimulto de homoj konsideras kutime la matematikon sciencon tre malfacila, peniga kaj ne alloga. Tamen, mi ekvolus pruvi la kontraŭon kaj paraleligi inter matematiko kaj filozofio, se eble. . !

Mi proponos kelkaj problemojn, enigmojn kaj filozofiajn ideojn ĉerpitaj el la malgranda libro de Petko Arnaŭdov² kaj Ludmila Arnaŭdova titolita: Matematiko kaj legaĵoj por ĉiuj.

Eŭklido demandis iutage sian lernanton:

- *Kion vi dezirus ekhavi: du pomojn aŭ kvar duonpomojn?*
- *Mi ŝatus la duonpomojn - respondis la lernanto.*
- *Kial do? Ĉu ne samas?*
- *- Ne, estas malsame. Tranĉitajn oni ne povas diveni ĉu ili entenas vermojn aŭ ne? . .*



• Jen nun la unua problemo³:

Iu fiŝisto kaptis fiŝon, pro tio li ege feliĉis. Demandite kiom da kilogramoj pesas la fiŝo, li respondis: “La hvesto pesas 1 kilogramon, la kapo

¹ Ĉerpita el la prelego de Claude Pierroux, Belgio, je 18 - an de novembro 2002

² Bulgara kolego el Pazargjik, forpasinta jam. Li publikigis la libron “Amuza Matematiko”, ege inspirinta ankaŭ min - noto mia, B. S.)

³ La solvo trovigxas sur aliaj pagxoj

pesas tiom kiom la hvesto mem plus la duono de la korpo; la korpo pesas tiom kiom la kapo kaj la hvesto kune. Diru al mi kiom da kilogramoj pesas la fiŝo?

Pasintempe la grandaj homoj estis enciklopedistoj. Tiel Pitagora estis same filozofo. Kelkiu demandis lin:

- Kiamaniere oni povas pli bone testi viron, virinon kaj oron?
- La oron oni testas per fajro, la virinon per la oro kaj la viron per la virino! - respondis Pitagora.



Pitagora

Babilemulo tro tedis Pitagoron, tial iufoje la sciulo admonis lin:

- oportunos al vi estu silenta kiam vi ne havas ion por diri pli bonan ol la silento mem!

- **La dua problemo**, pli filozofia ol matematika, konsistas el kelkaj demandoj de la granda greka matematikisto, Taleso, el Mileto, konsiderita kiel unu el sep plej saĝaj homoj de la malnova mondo, kiu enkondukis la unua la pruvadon en matematiko kaj science ĝenerale:

- Kio en la mondo plej abundas laŭkvante?

Kio en la mondo estas plej rapida?

Kio en la mondo estas plej agrabla?

- Kio en la mondo estas plej saĝa?



Thales

- **La tria problem⁴**, venas ĉifoje el geometrio: En kvadrato je eĝa longeco “a” enskribitis cirklo kaj sur alia kvadrato sameĝe enskribitis kvar malgrandaj cirkloj, ĉiu el ili tuŝas du eĝojn kaj du ceterajn cirklojn. Kiu havas pli grandan surfacon, la granda cirklo aŭ la kvar cirkletoj kune?



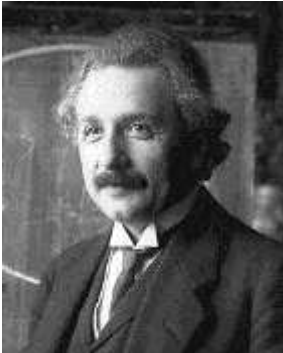
Zhan le Ron D'alamber (1717 - 1782)

Iufoje, oni diris al Ajnŝtajno:

- Mi admiras vian geniecon, tial ege scivolemas ĉu vi kunportas ĉiam paperon kaj skribilon por ke notu viajn ideojn?

⁴ La solvo sekvas sur aliaj pagxoj

- Ajnŝtajno respondis: “Oh, ne, kara mia! La grandaj ideoj alvenas ĉe min ege malofte, tial ne malfacilas por mi parkerigi ilin.”



Albert Einstein

Ankaŭ Jan Komenski⁵ estas dirinte: “Ne promesu senĉese ke vi faros ion, ne fanfaronu ke vi jam faris ion, sed certiĝu ke mem via laboro laŭdu vin”.



Jan Comenius (1592 - 1670)

- **La kvara problemo venas el algebro:**

- 1) Kiom longa estiĝos la vico el kubaj metroj rezultiĝintaj kiam ni eltranĉus unu kuban kilometron en pecojn je unu kuba metro?
- 2) Kio estas pli: $(-3)^3$ aŭ 3^{-3} ?
- 3) Prezentu 100 per kvar naŭoj!
- 4) Prezentu 100 per ses naŭoj!

⁵ Jan Komenski, elstara cxeha pedagogo

La kvina problemo⁶ havas iomete logikan karakteron:

- 1) Iu kondamnito al morto akiras la eblecon elekti unu el la verdiktoj notitaj sur du paperpecoj. Sur la unua oni skribis la vorton “vivo” dum sur la alia la vorton “morto”. Fakte la kondamnita komprenis ke oni estas skribintaj sur ambaŭ paperpecojn nur la vorton “morto” kaj li tute ne eblis rezigni de la elekto. Kiamaniere li do devas agi por saviĝi?
- 2) La loĝantoj de la urbo de Lieĵ eldiris ĉiam la veron dum tiuj de la najbara urbo, Verviers, ĉiam mensogis. En ambaŭ urboj alvenis ĉiutage vizitantoj el la alia urbo, tute sen ia distingo unu de la alia. Kiu estus la oportuna ununura demando al la urbanoj, fare de iu fremdulo konanta la karakteron de ambaŭ urbanoj, sed ne scias en kiu urbo ja li troviĝas nun, por ke, danke al la lakonikaj respondoj per “Jes” aŭ “Ne”, li divenu kie troviĝas, ĉu en Lieĵ aŭ en Verviers?

• **La sesa problemo⁷** konsistas el tri problemetoj:

- 1) Ĉina malnova tasko: en iu korto estas kelkaj leporoj kaj kelkaj fazanoj, entute 35 havantaj kune 94 piedojn. Kiom da ili estas leporoj kaj kiom fazanoj?
- 2) Unu kaj duonkato manĝas unu kaj duonmuson dum unu kaj duonhoro. Kaj kvin katoj dum kiom da horoj povus manĝi dek musojn?
- 3) Du turistoj eksidis ĉrikaŭ manĝotablo. La unua kunportis du frititajn fiŝojn dum la dua nur unu fiŝon. Tiumomente, aliĝis al ili tria turisto kunportanta neniun fiŝon. Sed la triopo manĝis kune kondiĉe ke la tria turisto pagus la ceterulojn per 5 eŭroj kiel rekomepencon. Kiamaniere la du turistoj devas dividi la monon?

⁶ La solvo trovigxas pli sube.

⁷ La solvo sekvas sur aliaj pagxoj

Rusa sciencisto Miĥail Lomonosov estas dirinta: “Oni devas ellerni matematikon almenaŭ pro celo pliordigi nian menson”.



Mihail Lomonosov (1711 - 1765)

- **La sepa problemo⁸:**

a) Oni devas surmeti relon inter du punktoj, kiuj troviĝas unu de la alia je distanco 1000 m. Sed la relo longas 1001 m. Por ke oni ne tranĉu ĝin estas konstruita muro sur ties mezo. Kiom alta devas esti tiu muro?



La ponto

b) Ŝnuro envolviĝas ĉirkaŭ la ekvatoro. Alia ŝnuro pli longa ĉirkaŭenvolas la ekvatoron 1 metron je distanco disde la unua ŝnuro. Kiom longa devas esti ĝi?



Ekvatoro

⁸ La solvoj sekvos pli poste

• **La oka problemo⁹** : (per divenebleco)

- 1) Se mi dividas la duonon de la cento per duono, kio rezultiĝos?
- 2) Kiu unucifera nombro estas la sepoblo de la nombro prezentata de la ties unuoj?
- 3) La avo estas 56 jara kaj la nepo 14 jara. Nun la kvociento de iliaj aĝoj estas $56:14 = 4$. Kiam la avo havos la duoblon de la nepa aĝo?
- 4) La sumo de la aĝoj de la patro kaj la filo estas nun 74 jaroj. Antaŭ kvin jaroj la patro estis trioble pli aĝa ol sia filo. Kiom jara estas ĉiu el ili hodiaŭ?
- 5) Kiamaniere ni devas dividi 12 por ke havu du egalpartojn, el kiu unu estu sep?
- 6) Kiamaniere ni devas substrahu 88 de 12 por ke la diferenco rezultiĝu 22?
- 7) Kiu estas la lasta cifero post la multipliko de la unuaj 100 nombroj neparaj?
- 8) Kiu plurgono havas tiom da eĝoj kiom da diagonaloj?
- 9) Kioma estas la surfaco de la triangulo je eĝoj 13, 27 kaj 14 cm?
- 10) Trovu du nombrojn kiujn multiplikite aŭ substrahite (la dua de la unua) rezultiĝu la sama valoro?
- 11) Ĉu ekzistas du nombroj kies sumo, produkto kaj kvociento estu la sama?

Estas ankaŭ aliaj problemoj sed mi limigos min per tiom.

La solvoj

1.

La kondiĉoj tradukiĝas per esprimaĵoj:

x kg penas la korpo.

La kapo penas $= x/2 + 1$;

Tiam la korpo $x = x/2 + 1 + 1$

de kie $x/2 = 2$ aŭ

$x = 4$ kg.

Tiam la fiŝo havas mason je $4/2 + 1 + 4 + 1 = 8$ kg.

⁹ La solvo sekvas pli poste

3.

La radio de la unua cirklo estas $a/2$ dum ĝia surfaco $\pi (a/2)^2$. La malgrandaj cirkloj havas radion je $a/4$ kaj surfacojn $\pi(a/4)^2$. Ĉiuj kvar cirkloj havas surfacon je

$$4 * \pi(a/4)^2 = \pi a^2/4, \text{ do la samon.}$$

5.

La kondamnito al morto povus tuj engluti unu el la paperpecoj kaj poste diru: Oh, pardonu min, mi hastis kaj eraris, tamen vi povas ekvidi kio estas skribita sur la alia paperpeco kaj agu kontraŭe.

Por ke divenu en kiu urbo ni troviĝas ni povas demandi : Ĉu vi estas loĝanto de ĉi tiu urbo? - Tie kie aŭdiĝas “Jes” tie estas la urbo Lieĵ.

6.

- Ni supozu ke ĉiuj bestoj estas leporoj, tiam rezultiĝus $35 * 4 = 140$ piedoj, sed la kondiĉo parolas pri 94 piedoj aŭ 46 malpli. Tio rezultiĝas ĉar parto el ili estas fazanoj kiuj estas do $46 / 2 = 23$. Do ni havas $35 - 23 = 12$ leporoj kaj 23 fazanoj. La pruvo:

$$12 * 4 + 23 * 2 = 48 + 46 = 94$$

- 1.5 katoj dum 1.5 horoj manĝas 1.5 musojn
5 katoj dum x horoj manĝas 10 musojn

La dependeco de la tempo kaj la katoj estas malrekte proporcia, tio de la musoj kaj la tempo estas rekte proporcia. Tiam $x = 1.5 * 1.5/5 * 10/1.5 = 3$ horoj

- Entute estis tri fiŝoj por tri personoj. Do, ĉiu el ili manĝis po unu fiŝon. La unua turisto havis du fiŝojn, unu estis manĝita de li mem, unu restis por la tria turisto. La dua turisto ja manĝis sian ununuran fiŝon. Rezulte la unua turisto rajtas rekompenciĝi per 5 eŭroj.

7.

- Estas triangulo je bazo 1000 kaj lateroj po 500.5 m. Ni povas kalkuli la longon de la vertikalo strekita de la kulmino sur bazon per la teoremo de Pitagoro:

$$h^2 = 500.5^2 - 500^2 = 0.5 \cdot 1000.5 = 500.25$$

kaj mem $h = \text{proksimume } 22.34 \text{ m}$

- Ĉi tie la diferenco inter du radioj estas 1 m, tiam la diferenco de la cirkonferencoj estas
 $p - p' = 2\pi \cdot 1 = 6.28 \text{ m}$

8.

4) La patro estas 53 jara dum sia filo 21 jara.

Historio de la matematikaj kncceptoj¹⁰

La negativaj nombroj

Ankoraŭ en XVI kaj XVII jc. pluraj sciuloj konsideris falsaj la negativajn nombrojn, t. e. sen ia reala senco.

Estis ja hindianoj tiuj kiuj enkondukis la pozitivajn kaj negativajn kvantojn, prikonsiderante la profiton kaj la ŝuldon. Bramagupta (598 - 660) en sia libro “Brahma - sputra - sidenta” (Reesplorado de la sistemo de Brahma), konsistanta el 20 volumoj, diris:



Brahmagupta

“La sumo de du profitoj estas profito, la sumo de du ŝuldoj estas denove ŝuldo, la sumo de profito kaj ŝuldo estas ilia diferenco, tio estas nul kiam ambaŭ ili estas egalaj.

¹⁰ **Bardhyl Selimi**
 Konspektite de la libro “La granda teoremo Ferma”

La sumo de nul kaj ŝuldo estas ŝuldo, de profito kaj nul estas profito, de du nuloj estas nul.

La pli malgranda substrahatas de pli granda, profito de profito, ŝuldo de ŝuldo. Sed kiam substrahatas la pli granda de pli malgranda, ni havos ŝuldon. La ŝuldo substrahite de nul, fariĝas profito, la profito transformiĝas en ŝuldon. ”



Brahmagupta - pentraĵo

Bhaskara¹¹ - Akaria (jaro 1114) dediĉis sufiĉan atenton al la negativaj nombroj. Li skribis:



Bhaskara

“La produkto de du profitoj aŭ de du ŝuldoj estas ja profito, de profito kaj ŝuldo estas ŝuldo. Same, rilate la dividon. La kvadrato de la profito aŭ de la ŝuldo estas profito. La profito havas du radikojn: unu profito kaj la alia ŝuldo ”

¹¹ Li vivis en VII jc. Oni pensas ke li transprenis de hindoj la pozician sistemom de la nombro-notado, malkovrita jam en la jaro 500.

La italoj de XVI jc. (Paĉioli, Tartaglia, Ferro), kvankam uzadis la regulon pri la signoj dum operacioj, konsideris la minus - signon unuflanke, nur kiel substrahado kaj ne ankaŭ kiel simbolo de la negativa nombro.



Luca Bartolomeo de Pacioli 1446 - 1517

Kardano, la unua esploris la negativajn radikojn de la ekvacio (1501 - 1576). Ĉi radikojn li nomis fikciaj, je la senco ke ilin oni ne imagas kiel pozitivaj.



Scipione del Ferro (1465 - 1526)

La germano Ŝtifel en XVI jc. en sia libro “La germana aritmetiko” establis la regulon pri la signoj dum plenumado de la algebraj operacioj kaj ekuzis vaste la negativajn nombrojn. Li skribis:

“La algebraj operacioj plenumataj konforme al ĉi regulo venigas nin al la inventaĵo envere stranga. . . ni apenaŭ imageblas senutilaj la nombrojn sube de la nulo aŭ malpli ol nenio. ”

Viet (1540 - 1603), franca matematikisto, patro de la simboleca algebro, studadis la algebrajn ekvaciojn en ilia ĝenerala formo kaj establis relacion

inter la radikoj de la ekvacio kaj la koeficientoj de la kvadrata ekvacio kaj pli poste de kiu ajn grada ekvacio. Li fakte ne estis profesia matematikisto, sed advokato, per matematiko li rilaksiĝis. Viet publikigis la libron “La matematika kanono” en la jaro 1579. Li estis forta kontraŭulo de la negativaj nombroj.

La negativaj nombroj ekintrepetiĝis ankaŭ kiel segmentoj en XVII jc. de la nederlandano Ĝiras (1595 - 1634) kaj franco Dekart. Ĉi lasta uzadis ilin por la grafika prezentado de la diversaj procesoj per punktoj sur la numera akso



Rene Descartes (1596 - 1650)

Babilonanoj uzadis vaste la aritmetikajn numerajn tabelojn. Ekzemple, du trovitaj tiaj tabeloj en Senkerah apud Euftrato en la jaro 1854, datiĝas ekde la jaro 200 antaŭ Kristo.



Senkerah in Babilonia

Tiuj tabeloj provizas la kvadratojn de la nombroj ekde 1 ĝis 59 kaj la kubojn ĝis 32. Por iel simpligi la multiplikadon ili uzis la formulojn:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Babilonanoj fakte ne disponis pri aparta algoritmo por la divido. Anstataŭ ĝi, ili baziĝis sur la fakto ke

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

kune kun la tabelo pri la inversaj nombroj.

La nombroj havantaj simplajn faktorojn nur 2, 3 aŭ 5 (konataj kiel regulaj nombroj) ĝuis la ekziston de ties finiaj inversoj en la notado je bazo 60 kaj estas ja trovitaj sur la tabeloj enhavantaj la inversajn nombrojn. .

La inversoj de $1/7$, $1/11$, $1/13$, k. s. ne disponas pri finian prezenton en la sistemo je bazo 60. Por elkalkuli $1/13$ aŭ por dividi nombron per 13 babilonanoj uzadis la jenan proksimiĝadon

$$\frac{1}{13} = \frac{7}{91} = 7 \times \frac{1}{91} \approx 7 \times \frac{1}{90} = 7 \times \frac{40}{3600}.$$

La kvadrataj ekvacioj

Babilonanoj disvolvis ankaŭ la metodojn de la solvado de ekvacioj. Denove ili baziĝis sur la anticipe kompilitaj tabeloj. Por solvi kvadratan ekvacion ili uzis la standardan formulon. Ili prikonsideris la kvadratan ekvacion

$$x^2 + bx = c$$

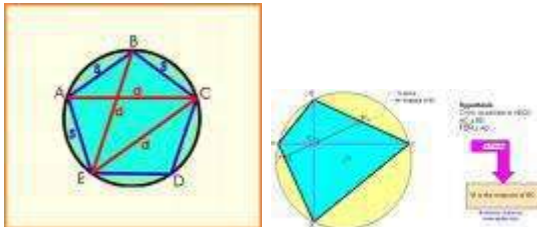
Kie **b** kaj **c** ne estis nepre entjeroj, sed **c** estis ĉiam pozitiva. Ili konis kiel solvaĵon

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Uzante la tabelojn pri la kvadratoj ili trovis inverse la duan radikon. Ĉiamfoje prikonsideris nur la pozitivajn radikojn, ĉar ili ja havis “realan” sencon. La problemoj rilatantaj al ĉi ekvacioj estis ekz. tiuj pri la kalkulo de

la dimensioj de la rektangulo kiam donite ĝia surfaco kaj la nombro indikanta kiom pli granda estas la longo ol la larĝo.

La praaj grekoj konstruis geometrian algebron kie elvoviĝis la metodoj de la solvado de kelkaj kvadrataj ekvacioj, motiviĝinte de geometriaj problemoj.



Eŭklido (III jc. antaŭ Kristo) dediĉis al tiu temo sian duan libron de “La Bazoj”.



Euklido, vivis ĉirkaŭ jaro 300 antaŭ Kristo

Heron (II jc.) donis unuafoje la puran metodon de la solvado de la kvadrata ekvacio. Per la hodiaŭa simbolaro jen kiel li solvis la ekvacion:

$$11x^2 + 29x = 212 \cdot 4$$

$$x = 1/(11 \cdot 20) \cdot (\sqrt{176 \cdot 212 + 841} - 29)$$

Pli poste, en III jc. Diofanto, ne uzante geometrion, simple je geometria aliro, solvis la kvadratajn ekvaciojn. Tamen li ne sukcesis trovi la ĝeneralan metodon, alirota de hindoj. En XII jc. Bhaskara donis por la ekvacio:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Ĉi solvaĵon

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$$

Sed la negativajn radikojn li ne prikonsideris, ĉar laŭ li, homoj ne akceptus ilin. En la algebra parto de sia traktaĵo pri astronomio, Bhaskara esploris vicon da taskoj kondukantaj al la kvadrataj ekvacioj.

Ekz.

Grego da simioj estis distrante sin, la kvadrato de ilia okono ludis en la arbaro, dum la ceteraj 12 simioj kriadis sur la monteta pinto. Diru al mi, kiom da simioj estis entute?



Ĉi tiu problemo kondukas al la ekvacio:

$$x^2 - 64 x + 768 = 0$$

Ĝia solvaĵo estas

$$x = 32 \pm \sqrt{1024 - 768} = 32 \pm 16$$

de kie

$$x_1 = 48 \text{ kaj } x_2 = 16$$



La teorion de la algebraj ekvacioj ellaboris pluen Al Horezmo, arabo, kiu donis 6 specojn de kvadrataj ekvacioj:

$$x^2 = 4x \quad x^2 = 1 \quad bx^2 = c \quad x^2 + bx = c \quad x^2 + c = bx \quad bx + c = x^2$$



Al - Horezmo sur la sovetiaj poŝtmarkoj

Por ĉiun el la ses supraj ekvacioj Al Horezmo donis la formulaĵon laŭvorte (ne simbolece) kaj apartan solvigan regulon.



Daniel Bernulli (1700 - 1782)

Post Viet, Ĵiras perfektigis la ĝeneralan teorion de la solvado de kvadrataj ekvacioj.

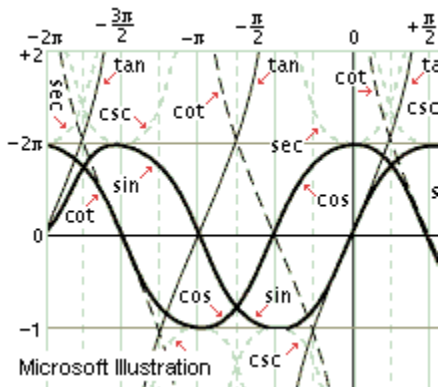
Funkcio

En XVII jc, ekaperis tute klare ĉe Fermat (1601 - 1665) kaj ĉe Dekarto, la ideo pri la ŝanĝiĝantaj grandoj. En sia libro “Geometrio” Dekarto en la jaro 1637 donis la koncepton pri funkcio kiel variacio de la ordinato de la punkto depende de variacio de ties abciso.



Pierre Fermat (1601 - 1665)

Njutono same uzadis la koncepton pri funkcio. En la jaro 1671 li komprenis funkcion kiel variigintan kvanton depende de la tempopaso. Li nomis tion “fluento”, io fluanta.



“Mi nomas –diris li - fluento, kiel grandoj senĉese kaj senfine kreskantaj. ”



Isaak Newton (1743 - 1726)

Lajbnico menciis funkcion en la jaro 1694, komprenante ĝin kiel segmenton, kies longo ŝanĝiĝas laŭ certa leĝo.



Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

En XVIII jc. la funkcio komprenatis kiel ia formulo liganta du grandojn. Tio estis ja analitika vidpunkto de J. Bernuli (1687 - 1748), kiu en la jaro 1718 difinis la funkcion tiel: *kvanto formiĝanta iamaniere de variacianta kaj konstanta grandoj*



Jakob Bernulli (1654 - 1705)

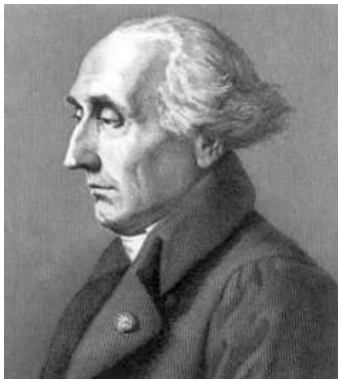
La definitivan difinon donis L. Euler en la jaro 1748.



Leonard Euler (1707 - 1783)

“Analitika esprimajo formiginta de la variacianta grando kaj nombroj aŭ konstantaj grandoj. ”

Tiun difinon subtenis Lagranĝo (1736 - 1813), dum



Joseph Louis Giuseppe Luigi - Lagrange (1736 - 1813)

N. J. Lobaĉevskij estas formulinte ĝin tiel:

“Funkcio de x nomiĝas la nombro donata pri ĉiu x kaj ŝanĝiganta senĉese kune kun x . ”

La valoron de la funkcio oni povas doni analitike, aŭ per la kondiĉo certiganta la rimedon por provi ĉiujn nombroj kaj elekti unu inter ili, aŭ la dependeco povas ekzisti sed restas nekonata.

Dirihle (1805 - 1859), difinis ĝin tiel:



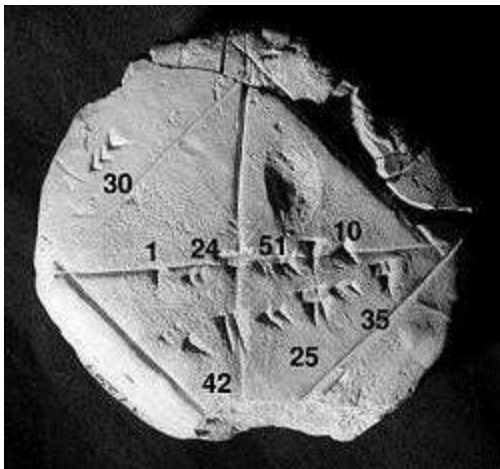
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 - 1859

“y estas funkcio de la variablo x en la segmento $a \leq x \leq b$ se al ĉiu valoro de x en ĉi segmento korespondas plene difinita valoro de y , dume ne gravas kiamaniere estas establita ĉi tiu korespondo. ”

Ĉi tiu difino uzatas ankoraŭ nuntempe. .

Progresioj

Aritmetika progresio konatis same de babilonanoj. En teksto sur pergameno legiĝas problemo kie oni postulas la diferencon de la geometria progresio donite la sumo de ties 10 unuaj terminoj kaj la oka termino. .



Kota babilona tabelo: la diagonalo prezentas proksimume la duan radikon de 2 per ciferoj je bazo 60

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296... .$$

Tion jam konis ankaŭ egiptoj. En la papiruso Rajnda donitas ĉi tiu problemo:

“Estas 7 domoj, en ĉiu el ili estas 7 katoj, ĉiu kato manĝas 7 musojn, ĉiu muso manĝas 7 spadikojn da aveno, ĉiu spadiko da aveno donas 7 kg da aveno. Diru kiom da domoj, katoj, musoj, spadikoj kaj kilogramoj da aveno estas entute?”

Ĉi tiu problemo solviĝas tiamaniere: $N = 7^4 = 2401$



Monumento al Al - Horezmo

La praaj grekoj uzadis la progresiojn, kiel en aritmetiko, tiel en geometrio. Arkimedo traktis ilin en la libro “Elkalkulo de la sableroj”



Arkimedo (287 - 212 antaŭ Kristo)

Dum la Renesanco, Fibonaĉi en sia libro “Libro pri la Abako” (1202) donas detalan teorion pri progresioj. Tie estas ankaŭ la fama ĝneraliĝo konata kiel “Serio de Fibonaĉi”.

Ekzemple 0 1 1 2 3 5 8.....

Kiel vidite, la konstruregulo jenas: ĉiu nombro komencante de la tria termino estas sumo de la du antaŭ ĝi nombroj.

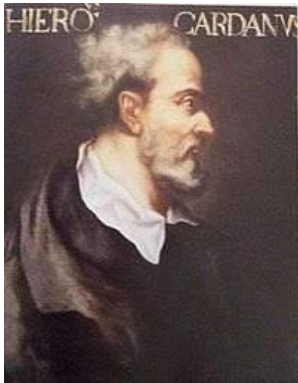
Ŝtifel en XVI jc. utiligas la progresiojn en la kalkulaj praktikoj. Ŝtifel estis pastro klopodinta meti matematikon je la servo de religio. Li eĉ antaŭvidis

ankaŭ la “finon de la mondo” kiu koincidus al la 19 - a oktobro 1533! Sed tio ne okazis, li forlasis la religian medion kaj ekokupis sin per scienco. Tiel, en la jaro 1544 li aperigis la libron “Kurso de aritmetiko” kaj en la jaro 1545 “Germanan aritmetikon”. En la jaro 1553 li publikigis la studojn pri algebro.

En XVII jc. Valis, Lajbnico kaj Njutono esploris la polinomajn seriojn kiuj havas multajn aplikojn en la supera matematiko kaj servas kiel pluaj ĝeneraliĝoj.

La kompleksaj nombroj

La imageblajn nombrojn oni ekuzadis unuafoje en XVI jc. Kardano (1501 - 1576) en la jaro 1544 publikigis laboraĵon kie elvolviĝas la ĝenerala solvo de la ekvacioj de la tria kaj kvara gradoj, malkovritaj samtempe de siaj italaj samtempuloj.



Gerolamo Cardano 1501 - 1576

Tiun laboron komencis Tartaglia. Fakte li apenaŭ estis finstudinta eĉ en la elementa lernejo! Sed li edukiĝis memstare per la latina, greklingvo kaj matematiko. En la jaro 1530 li sukcesis trovi la solvon de la kuba ekvacio en aparta kazo. En la jaro 1535 li venkis en la matematika duelo kun Fiore. Tiucele, li estis preparita aparte por la kuba ekvacio, kies ĝeneralan solvon li trovis post dekjara studado. Dum la duhora disputo li sukcesis solvi ĉiujn 30 problemojn proponitaj de Fiore. Dum Fiore eĉ post 50 tagoj apenaŭ sukcesis solvi eĉ unu el la 30 problemoj proponitaj de Tartaglia. Temis pri taskoj el algebro kaj geometrio.



Nicolo Tartaglia (1500 - 1557)

La kuba ekvacio

La tabeloj de la valoroj $n^3 + n^2$ anticipe kompilitaj de babilonanoj, utiliĝis por solvi kelkajn kubajn ekvaciojn. Ekz. ni prenu la ekvacion

$$ax^3 + bx^2 = c.$$

Multplikinte ĝin per a^2 kaj dividinte per b^3 ni ricevos

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}.$$

Anstataŭiginte $y = ax/b$ ni ricevos

$$y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$$

Tio povas solviĝi uzante la tabelon $n^3 + n^2$, trovinte la pli proksiman valoron sur dekstra flanko. Babilonanoj plenumis ĉi tion sen algebraj notacioj montrante tiel eksterordinaran profundan komprenemon. Tamen ili ne posedis ian metodon por solvi ĝenerale la kuban ekvacion.

Ĉi tio okazis nur ĉe la italaj matematikistoj.

La Regulon por la solvo de la ekvacio de la tria grado Tartaglia tenis sekrete, esperante publikigi tion per speciala traktaĵo pri algebro.

La ekvacio de la tria grado en ĝia ĝenerala formo jenas:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

kie per la anstataŭiĝo $x = y - a_1 / (3a_0)$ reduktiĝas en la formon

$$y^3 + p y + q = 0 \text{ kie}$$

$$p = \frac{-a_1^3}{3a_0^2} + \frac{a_2}{a_0} \text{ dhe } q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}$$

Ĝi havas kiel radikon

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ni elektu iun ajn valoron de la unua kuba radiko, poste ricevu tiun valoron de la dua radiko (el tri eblaj) kiu multiplikite per la elektita radiko de la unua radiko donas $(-p/3)$. Tiel, akiritas la tri radikoj de la ekvacio. .

Ni devas havi $\alpha + \beta = x$ kaj $\alpha\beta = -p/3$

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1 \varepsilon + \beta_1 \varepsilon^2$$

$$x_3 = \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1 \varepsilon$$

$$\varepsilon = \sqrt[3]{1}$$

Ekzemplo

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0$$

$$y = x - 1$$

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

$$p = -6$$

$$q = -9$$

$$q^2/4 + p^3/27 = 49/4 > 0$$

$$\alpha = \sqrt[3]{9/2 + 7/2} = \sqrt[3]{8}$$

$$\beta = \sqrt[3]{9/2 - 7/2} = \sqrt[3]{1}$$

$$\alpha_1 = 2; \beta_1 = 1$$

$x_1 = 3; y_1 = 2$ dum x_2 kaj x_3 estas kompleksaj nombroj

La ekvacio de la kvara grado

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

Ni anstataŭigu $y = x - a/4$

Tiam ni havos

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Ĉi tiu reduktiĝas en du ekvaciojn de la dua grado

$$x^2 - \sqrt{2\alpha_o}x + (p/2 + \alpha_o + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}}) = 0$$

$$x^2 + \sqrt{2\alpha_o}x + (p/2 + \alpha_o - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}}) = 0$$

Ĉi tiu regulo hodiaŭ konatas kiel regulo de Kardano (1501 - 1576). Kial do? Ĉar tion popularigis la unua Kardano. Kardano, fakte sukcesis solvi ĝin sendepende, post Tartaglia, kvankam oni diris ke Tartaglia kredigis la formulon al tria persono, kiu estis promesinta ne priparoli tion kun aliuloj. Sed post 6 jaroj, tiu persono ne tenis la donitan parolon. Dumtempe, Kardano publikigis la libron “La granda arto de la aferoj de algebro” kie li anoncis ankaŭ la sekreton de Tartaglia. Tio ege kolerigis Tartaglia - n kiu tutan vivoreston polemikis kun Kardano.

Por ke konservu la ĝeneraliĝon de sia formulo, Kardano bezonis esplori ankaŭ la kompleksajn nombrojn, uzataj en apartaj kazoj dum la interaj kalkuladoj, dum la fina rezultato restis reela.

Pli poste Kardano aplikis la imageblajn nombrojn por solvi la problemon “sumo dek de du adiciantojn, kies produkto estis 40”. La problemo envorte reduktiĝis al la ekvacio:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$\text{kiu donas } x_1 = 5 + \sqrt{-15} \text{ kaj } x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

La akiritajn radikojn Kardano traktas kiel ordinarajn nombrojn konsiderante ke $\sqrt{-15} * \sqrt{-15} = -15$. Ĉikaze, la kondiĉoj de la tasko plenumiĝas.

Kardano estis kuracisto kaj filozofo samtempe. La formulo de la solvo de la ekvacio portas lian nomon.



Evarist Galua (1811 - 1832)

Bombel en XVI jc. donis la unuan teorion ne tiom rigoran pri la imageblaj nombroj. En la jaro 1542 li montris la regulon pri multiplikado de la imageblaj nombroj laŭ kio la rezultato povus esti ankaŭ reelo. .



Rafael Bombelli (1526 - 1572)

Ĵirar en XVII jc. klopodis ekspliki la kompleksajn nombrojn el la vidpunkto de praktika utilo.

Lajbnico uzadis ilin je la komenco de XVIII. En la jao 1702 li utiligis la kompleksajn nombrojn por malmunti polinomoj en faktorojn. - “Ĉi tiu estas la bebo de la mondo de ideoj, kreaĵo preskaŭ duobla, kuŝanta inter la ekzisto

kaj malekzisto“ - rimarkigis Lajbnico ne havante ankoraŭ klaran ideon pri la kompleksaj nombroj.

La konata formulo de Muavro (Moivre, 1667 - 1754) aperis je la komenco de XVIII jc.

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Muavro estis intima amiko de Njutono. Kvankam deveninte el Francio, li loĝis en Londono sin tenante per matematika instruado.



Abraham de Moivre 1667 - 1754

Leonardo Euler estis ege helpita danke al la formulo de Muavro por penetri profunden en la naturo de la kompleksaj nombroj.

Nur en la jaro 1799 Caspar Wesel (1745 - 1818), matematikisto dano - norvega, entreprenis la rigoran bazigon de la aritmetiko de la kompleksaj nombroj. Li interpretis ilin kiel vektorojn laŭ geometria vidpunkto. Sed siaj samtempuloj ne komprenis lin.



Encarta Encyclopedia, Photo
Researchers, Inc./Science Source

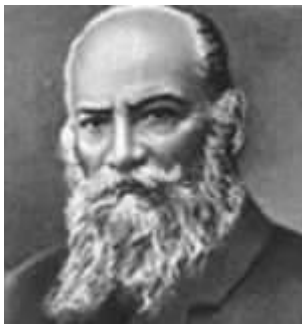
Baron Furie (1768 - 1830)

Gauso (1777 - 1855) faris similajn studojn kaj altiris la atenton de matematikistoj. Li estas desegninta la hodiaŭan aspekton de la kompleksaj nombroj.



Karl Gauss

En XIX jc. la matematikistoj kreis la teorion pri funkcioj de kompleksa variablo. Ĵukovski (1847 - 1921) utiligis tiun teorion surkampe de flugado, serĉante la leĝon pri la batado de la flugilo de la moviĝanta aviono.



Nikolai Ĵukovski (1847 - 1921)

Ĉi tiuj funkcioj uzatas same ankaŭ en hidrodinamiko, elektrostato, ks.
Ĉiuj kalkulaĵoj hodiaŭ pri digoj, avionoj, raketoj ka. estiĝas laŭ formuloj de la funkcioj je kompleksa argumento.



Henri Poincaré (1854 - 1912)

Teoremo de Pitagoro

Ĉirkaŭ la jaroj 580 - 500 antaŭ Kristo, vivis Pitagora. Naskiĝinte en Samos li studis en Egiptujo kaj Babilonio. Fine vivis en suda Italio kie li starigis sian skolon kaj klopodiĝis por doni al geometrio scienca karakteron.



Pitagora

Jen kelkaj liaj atingoj:

- *Teoremo de Pitagoro*
- *Teoremo pri la sumo de la internaj anguloj de la triangulo.*
- *La kovrado de la plano per regulaj poligonoj.*
- *Solvo de la kvadrataj ekvacioj per geometriaj metodoj.*
- *La regulo pri la solvo de la geometria tasko: laŭ du donitaj figuroj oni konstruu trian figuron egala al la unua kaj simila al la dua.*

Apartaj kazoj de la fama teoremo de Pitagoro konatis ankaŭ antaŭe. Egiptoj estis malkovrintaj la “egiptan triangulon” kun eĝoj 3, 4, 5. Ĉi tiu, laŭ ili, estis orta ĉar kontentigis la egalaĵon

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Ankaŭ hindoj konis la partajn kazojn.

Oni ne scias kiel Pitagoro pruvigis sian teoremon. Laŭ Kantoro (1845 - 1918), Pitagoro devus prezenti ian pruvadon por iu parta kazo, por la egallatera triangulo, kiel tion faris ankaŭ hindoj. Sur la eĝoj de ĉi tiu triangulo oni konstruis kvadratojn. Hodiaŭ ekzistas pli ol 100 diversaj pruvadoj. Se ekzistus unu el ili, povas esti ĝuste tiu de Pitagoro. . . . Eble, la teoremon estas malkovrinta iu el la lernantoj de Pitagoro, ĉar tiutempe ĉio konsideriĝis merito de la instruisto. . . .



Busto de Pitagoro en Vatikano

Vajerŝtraso (1815 - 1897), laboris kiel instruiston 13 jarojn. Poste li estis invitita kiel profesoron en Berlino. La sciencajn esplorojn li prezentis ĉefe en la lekcioj por studentoj ĉirkaŭ la apartaj ĉapitroj de la supera matematiko.

Inter liaj studentoj estis ankaŭ la rusino Sofia Vasiljevna Kovalevska (1850 - 1891).



Sofia Kovalevska (1850 - 1891)

Sed al ŝi li donis privatajn lekciojn hejme, preter kelkaj aliaj studentoj, ĉar estis malpermesite ankoraŭ al inoj la eniro en universitatoj. Kvankam dekomence, por forigi ŝin li donis malfacilajn taskojn, je lia miro, Sofia solvis ĉiujn ilin. Tio daŭris kvar jarojn. Oni diras ke inter ambaŭ ili ekestiĝis ankaŭ ia idilo.



Sofia partoprenis konkurson de Akademio de Sciencoj de Francio pri “Ringoj de la Saturno” kaj gajnis ĝin. Je miro de akademianoj ŝi estis ja ino! Poste Kovalevska sin okupis per matematiko, ĉefe en meĥaniko.



La ringoj de Saturno ricevitaj de Voyager 1

Sed Sofia estis same verkisto. “La batalo por feliĉo”, “ Autobiografiaj memoraĵoj”, “Nulistino”, estas kelkaj ŝiaj verkaĵoj.

La volumeno de prizmo kaj piramido

Ekde pratempe, oni sentis ĉi tiun bezonon. Babilonanoj devus elkalkuli la necesan materialon por diversaj konstruktadoj, por la kapacito de la konstruaĵoj, ujoj, basenoj, ktp. Ili elkalkulis sufiĉe ekzakte la volumenon de kuboido kaj rektangula piramido.



La piramidoj

Por la trunko de ĉi lasta ili aplikis la regulon kiu, per hodiaŭaj simboloj, havus ĉi aspekton:

$$V = h * [(\frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{3} * (\frac{a-b}{2})^2]$$

Post kelkaj simpligoj, ĉi formulo kondukas al:

$$V = \frac{1}{3} * h (a^2 + b^2 + ab)$$

Ne estas evidente kiamaniere babilonanoj trovis ĉi formulon.

Ankaŭ egiptoj konis la formulojn por kalkulado de la volumenoj de prizmoj kaj piramidoj.



La famaj piramidoj ege bezonis tion. Laŭ mendo de faraonoj, la piramidoj fariĝis grandaj. Tio de Keopso (2638 - 2613, antaŭ Kristo) ekz. havas kiel bazon kvadraton je eĝo 233 m kaj alteco 147 m. Por ties konstruiĝo bezonatis 2 300 000 grandaj ŝtonaj blokoj, je pezo 2.5 tunoj ĉiu. La kvalito de la laboraĵoj estis alta. La grandaj blokoj dispeciĝis, poluriĝis kaj kuniĝis unu al la alia je eksterordinara akurateco.

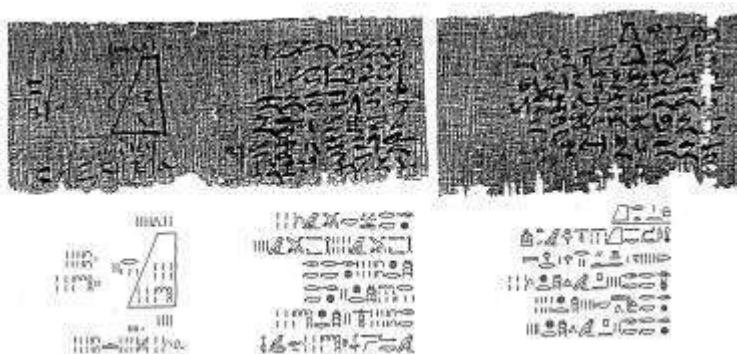


Piramido de Keopso

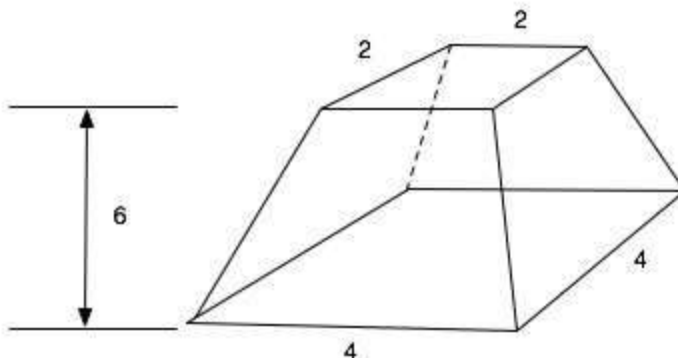
Sur la papiruso de Moskvo, konsiderata kiel la plej praa monumento de la greka matematiko, prezentiĝas tasko pri la elkalkuliĝo de la volumeno de la rektangula piramida trunko. Ĝi formuliĝas tiel:

“Trovu la volumenon de rektangula piramida trunko, se ties alteco estas 6, la eĝo de la malsupra bazo 4 kaj tiu de la supra 2”

La papiruso havas la dimensiojn: longo 544 cm, larĝo 8 cm.



Ĉi tie estas skribite la 14a problemo: volumeno de la piramida trunko. Volumeno rezultiĝas 56, t. e. ĝusta.



Teksto tie jenas:

" Se vi havas piramidan trunkon je alteco 6 kaj eĝoj de la bazoj respektive 4 kaj 2, tiam vi devas trovi la duan potencon de 4, t. e. 16. Poste trovu la duan potencon de 2, t. e. 4. Aldonu 16, ankaŭ 8, ankaŭ 4. la rezultato estas 28. Prenu $\frac{1}{3}$ de 6, rezultato 2. Vi devas preni dufoje 28, rezultato 56. Tio ĝustas. "

La supra tasko solviĝas per la formulo

$$V = \frac{1}{3} * h (B + b + \sqrt{Bb})$$

$$\text{Anstataŭiginte, ni ricevos } V = \frac{6}{3} *(16 + 4 + \sqrt{16*4}) = 56$$

Kompreneble, la egiptoj ne uzadis ĉi simbolojn, tamen la formulon jes.

La binomo de Njutono

La teorio de kombinaĵoj naskiĝis en Eŭropo en XV kaj XVI jc. rilate la problemojn pri hazardludoj. Tartaglia elkalkulis la nombron de kombinaĵoj kiam oni ludas per n ĵetkuboj kaj falas n poentoj. Li malkovris la konatan dependecon prezentata je formo de triangulo, kiu poste nomatis "Triangulo de Paskalo" (1623 - 1642), malkovrita sendepende sed pli malfrue ol Tartaglia.



Isaak Njuton

Kiamaniere oni povas trovi la nombrojn per kiuj devas multipliki du terminoj kiam la ties sumo aŭ diferenco potenciĝas je kia ajn natura grado.

Ekz. $(a + b)^2 = 1 a^2 + 2 ab + 1 b^2$.

Samtiel $(a + b)^3 = 1 a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + 1 b^3$

Paskalo proponis ĉi manieron je formo de triangulo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

La unua vico korespondas al la kazo $(a + b)^0 = 1$

La dua vico korespondas al la kazo $(a + b)^1 = 1 a + 1 b$

La tria vico korespondas al la kazo $(a + b)^2$, la kvara al $(a + b)^3$ kaj tiel plu.

Por trovi $(a + b)^4$ ni prikonsideras la kvinan vicon donanta
 $= 1 a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + 1 b^4$



Poŝtmarko en Francio honore al Paskalo

Ĉi tiu triangulo estas praktika por trovi la koeficientojn nomataj binomialaj. Ĉi lastaj estis prezentitaj ĝeneralforme ĉe Njutono (1642 – 1727) en la jaro 1676. Njutono donis ankaŭ la formulon de la malmuntiĝo de la binomo $(a + b)^n$ je kiu ajn potenco pozitiva aŭ negativa: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

Sed la formulon de la binomo de Njutono por naturoj eksponentoj per kombinaĵoj unuafoje donis J. Bernuli (1654 - 1705), dum tiun por kiu ajn eksponento Leonard Euler (1707 - 1783).

Nils Abel (1802 - 1829) pliperfektigis tion pluen. Li donis la ĝeneralan teorion sufiĉe rigoran.



Nils Abel (1821 - 1829)

Diferenciala kaj integrala kalkulo

La vojo al tiu teorio pavimitis de Dekarto kaj Ferma, operaciintaj per la dekarta variablo en la analitika geometrio.



Pierre Fermat

Baza koncepto estas la derivaĵo kiel rapideco de la ŝanĝigo de funkcio. La teorio pri derivaĵo akiris la nomon Diferenciala Kalkulo. Tion ellaboris sendepende Njutono en la jaro 1666 kaj Lajbnico disvolvintaj ankaŭ la duan parton de la matematika analizo, la integralan kalkulon, kies baza koncepto estas la integralo, la kontraŭa operacio al diferencialo.

Se per la derivaĵo troveblas la rapideco de la funkcio, tamen per integrado solviĝas la inversa problemo, troviĝas mem la funkcio surbaze de la rapideco de la funkcio. Tiel, je moveca maniero, pensis Njutono. Dum Lajbnico alvenis al ĉi konkludo je geometriaj vidpunktoj, konsiderante la derivaĵon kiel angulan koeficienton de la tangento.

Njutono nomis, kiel vidite, la funkcion de la tempo, “fluenton” (io fluanta), dum la derivaĵon “flukson”, notanta la rapidecon de la ŝanĝiĝo de la fluanto. Dum hodiaŭ la koncerna simbolaro baziĝas ĉe Lajbnico, ĉar ĝi uzas la koncepton “funkcio”, “koordinato”, “diferencialo”, kaj “integralo, “diferenciala kalkulo”, ktp.

La fratoj Bernulli (Jakov dhe Johan) kondukis antaŭen la novan teorion.



Johan Bernulli 1667 - 1748

En la jaro 1696 aperis la unua lernolibro de la matematika analizo, “Analizo de la infimitezimaloj por studado de linioj”, de L’Hopital.

Ĉi libro estis ja konspekto de la lekcioj de J. Bernuli, kion Lopitalo skribis dum la studentaj jaroj.



Guillaume François Antoine Marquis de l’Hopital 1661 - 1704

En ĉi tiu lernolibro Lopitalo donas la regulon pri la nuligo de maldifinaĵoj je formo 0/0 konsiderata kiel “La regulo de Lopitalo”.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Lobaĉevski

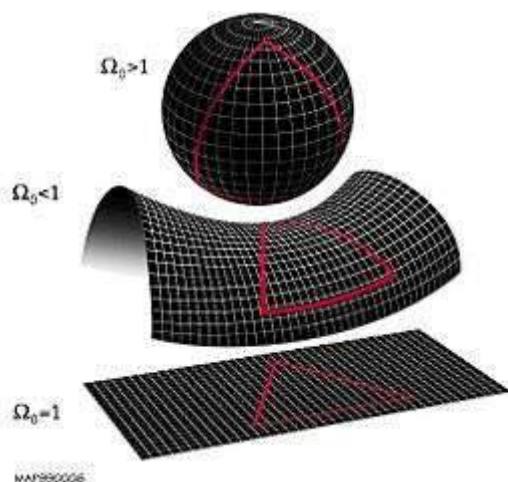
Nikolaj Ivanoviĉ Lobaĉevskij (1793 - 1856) el Malsupra Novgorodo (hodiaŭ la urbo Gorkij) finstudis en la urbo Kazano. Li posedis sendependan karakteron, pro kio oni intencis ekskludi lin disde universitato, sed la profesoroj subtenis forte lin pro liaj distingitaj matematikaj kapablecoj. Li eĉ plurestis en universitato kiel lekciisto kaj profesoro. Li akiris la gradon de magistro kiam aĝis nur 18 jara! En la jaro 1827 oni elektis lin rektoron kaj restis tia 20 longajn jarojn.



Nikolai Lobaĉevskij (1793 - 1856)

La plej grava malkovraĵo estas “Neeŭklideca geometrio”¹², pri kio li anoncis je 23an de februaro 1826. Li verkis “Pri la bazoj de geometrio” (1829 - 1830), “La imagebla geometrio” (1835), “Aplikado de la imagebla geometrio en kelkaj integraloj” (1836), “Novaj bazoj de geometrio kun la kompleta teorio de paraleloj” (1835 - 1838), “Geometriaj studoj pri teorio de paraleloj” (1856).

¹² Tio malkovrigxis ankaŭ de Karl Gauss (germano) kaj Janosx Boiai (hungaro) sendepende unu de la alia.



Geometrio de la Universo. .

Lia geometrio prezentis veran revolucion en matematiko. Clifford nomis lin “Kopernikon de geometrio”. Dum Kagan diras ke “estis pli facile haltigi la Sunon, pli facile movigi la Teron, ol malpligrandigi la sumon de la internaj anguloj de la triangulo” (Oni aludas pri Koperniko kaj Lobaĉevski).



Janoŝ Boyai (1802 - 1860)

Sed Lobaĉevskj ne ĝuis moralan subtenon de siaj kolegoj, kvankam oni alte aprecis lin postmorte. Lin ne subtenis ankaŭ Gauso kvankam li estimis lin kiel “ homon traktanta la objekton plenkompetentece je vera geometria etoso”, sed ne kuraĝis defendi lin publike.

Lobaĉevskj klopodis trovi eksperimentan pruviĝon de sia geometrio per astronomiaj observadoj konstruante triangulon kun kulmnoj sur la steloj. Per mezurado li volis pruvi ke en tia triangulo la sumo de la internaj anguloj estas malpli ol du ortoj.

Li staris kuraĝe eĉ kiam oni ekskludis lin de universitato, kiam mortis sia filo kaj ekonomio familia bankrotis, kiam blanhariĝis kaj blindiĝis. Jaron antaŭ la morto, li diktis la verkon “Pangeometrio” (Ĝenerala geometrio”) kie li prezentas la geometrion de Eŭklido kiel apartan kazon de lia neeŭklideca geometrio. Lobaĉevski estas skribinta ankaŭ lernolibrojn pri algebro kaj geometrio, en kies lasta li ne dividis la planimetrion disde stereometrio.



David Hilbert

Jen kelkaj elementoj de la geometrio de Lobaĉevskij

La kvina postulato de Eŭklido asertas:

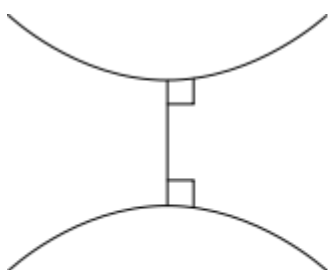
“Tra la sama punkto ekster certa rekto estas maleble trapasigi du diversajn rektojn paralele al la donita rekto. ”

Multaj matematikistoj pritraktis tion kiel teoremon kaj klopodis envane pruvi ĝin. Sed Lobaĉevski pruvis ke tio maleblas. Ĉar li anstataŭis ĝin per alia kontraŭa postulato kiu kunigite kun la aliaj postulatoj kaj aksiomoj konsistigas novan geometrion sen kontraŭdiroj. (Tra certa punkto ekster donita rekto sur ties plano eblas trapasi pli ol unu alia rekto ne tuŝanta la donitan rekton).

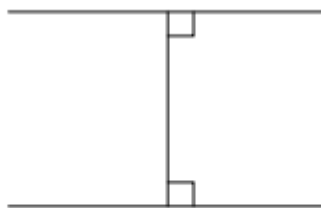
La nova geometrio ofertas la jenajn novajn konkludojn:

- La vertikalo kaj obliko sur la sama rekto povas eĉ ne ntersekciĝi.
- La sumo de la internaj anguloj de triangulo sanĝiĝas de unu al la alia triangulo kaj estas malpli ol du ortoj:
- La sumo de ĉiuj internaj anguloj de ĉiu konvekso kvarangulo estas malpli ol kvar ortoj. Do apenaŭ ekzistas la rektangulo.
- Ne ekzistas simplaj figuroj, diversaj unu de la alia. Aparte, por certa triangulo estas maleble konstrui alian similan al ĝi, sed ne kongrua al ĝi.
- Ne ĉirkaŭ ĉiu triangulo oni povas desegni cirkon.

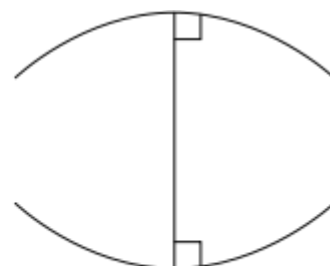
- La geometria loko de la egaldistancaj punktoj disde certa rekto sur la sama ties flanko ne povas esti rekto sed kurbigita linio.



Hyperbolic



Euclidean



Elliptic

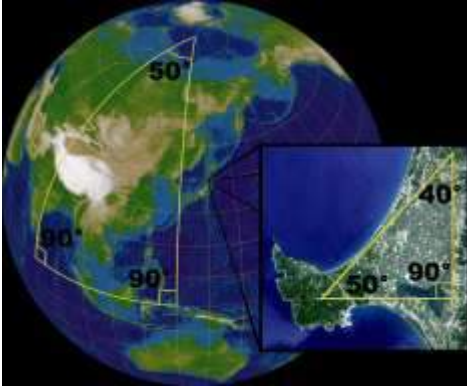
Ĉu estas reala la geometrio de Lobaĉevskij?

Unue ni devas ekspliki la signifon de punkto, rekto kaj plano. Estas ja ili tri kategorioj, kies ecoj donatas per la sistemo de la geometriaj aksiomoj. Aksiomo estas matematika propozicio akceptita sen pruvado kiel enirpunkton. Ekz. kiel punkton oni povas konsideri sferon je radio R , kiel rekton senfinan rondforman cilindron je radio R , kiel planon ebenan platon paralela je dikeco $2R$. Tiom pri la eŭklideca geometrio.

Dum en la lerneja kurso estas dirite ke la rekton oni povas imagi kiel fadenon forte streĉita, dum la planon kiel spegulon bone polurita.

Se ni desegnas ordinaran triangulon kaj la paperon faldigas je cilindra formo, tiam la eĝoj de la triangulo rezultigos fleksitaj. Se ni elvolvas denove la paperon, ĉi eĝoj rekiros la antaŭan formon, tiun de la ordinaraj rektoj.

La linioj sur la cilindra surfaco kiu dum la elvolviĝo fariĝas ordinaraj rektoj nomiĝas geodeziaj linioj de cilindro. Ĝenerale la geodezia linio de iu surfaco nomiĝas la linio je plej mallonga distanco inter du punktoj de tiu surfaco.



Sur sfero la sumo de la internaj anguloj de la triangulo ne egalas al 180°

Tiel, se kiel punktojn ni prenos la punktojn de la cilindro kaj kiel rektojn ties geodeziajn liniojn, tiam sur cilindro plenumiĝos la eŭklideca planimetrio.

Envere, pruveblas ke la sumo de la internaj anguloj de la geodezia triangulo egalas al du ortoj. Tio koincidas al la kvina postulato.

Ni ekvidu nun kiu geometrio pruviĝas sur sfero, kie kiel punktojn ni konsideru ĝiajn punktojn, kiel rektojn ĝiajn geodeziajn liniojn. Rimarkeblas ke la sfero sen tirado, nur per fleksado, ne povas elvolviĝi sur planon, kiel kutime okazas al cilindro, ĝiaj geodeziaj linioj ne povas transpasi al rektoj.

La geodeziaj linioj sur sfero estas grandaj arkoj, kiuj havante komunan centron, tiun de la sfero, reciproke intersekciĝas. Tial sur sfero ne ekzistas paralelaj rektoj. Sekve, tie tra punkto prenita ekster rekto sur sfero ni ne povas streki iun rekton paralelan al la certa rekto.

Akireblas tiel nova geometrio, kiu havas kiel apartecon la fakton ke “la sumo de la internaj anguloj de la geodezia triangulo rezultiĝas pli ol du ortoj”

Tio povas evidentiĝi sur la supra figuro kie sur sfero kie oni strekis kelkajn grandajn cirklojn estas fiksita geodezia triangulo ABC.

La sfera geometrio estas la plej simpla modelo de la neeŭklideca geometrio de Rimano.

Kaj nun ni respondu al la demando: ĉu veras la geometrio de Lobaĉevski? La respondo jenas: Jes! Ĝi estas vera, ĉar ĝi ja plenumiĝas sur reala surfaco.

Historiaj problemoj

Problemoj de Diofanto¹³

Sendube la problemoj, tiel nomataj de Diofanto, (kie la nombro de nekonataj kvantoj estas pli ol la nombro de ekvacioj spegulantaj ties rilatojn) ĉiam vekis kaj vekas ankoraŭ sufiĉe multe da scivolemo ne nur ĉe la gelernantoj.

Ni komencu per kelkaj simplaj ekzemploj.

- **La buso**



Kolektivo da laboristoj kun iliaj gefiloj mendis ekskursbuson kiu kostus entute 22400 L. (Leko - albana monunuo). La bileto por la adoleskanto kostis 560 L dum por la infano 320L. Trovu kiom da adoleskantoj kaj kiom da infanoj estis entute?

Solvo:

Se ni notus me x kaj y la nombrojn de adoleskantoj kaj infanoj, respektive, tiam ni akiris la jenan ekvacion:

$$560x + 320y = 22400$$

Kiu, plureduktite, havus la formon

$$7x + 4y = 280$$

¹³ Diophantes, filo de Asclepiodorus de Sinop, estis famiĝinta generalo pro la subigo de Scythoj, sur lokoj ĉirkaŭ la Nigra Maro. Vivis ĉirkaŭ la jaroj 200 - 284.

Ni prezentu $x = (280 - 4y) / 7$ de kie $x = 40 - 4y/7$.

x estas ja entjero, tial tia devas esti ankaŭ $4y/7$. Kontrolinte diversajn valorojn de y , kontentigantaj ĉi kondiĉon rezultiĝos $y = 7$ dhe $x = 36$

Respondo: 36; 7

- **Oraj taleroj**¹⁴



80 personoj (viroj, virinoj, infanoj) gajnis 200 orajn talerojn. Ĉiu viro gajnis 6 talerojn, ĉiu virino 3, ĉiu infano 1. Kiom da viroj, virinoj, infanoj estis respektive?

Solvo de Weber (jaro 1737):

Ni notu per x la nombron de viroj, per y tiun de virinoj. Tiam la nombro de infanoj estas $80 - (x + y)$

Laŭ la kondiĉo

$$6x + 3y + 1(80 - x - y) = 200$$

Tio kondukas al

$$5x + 2y = 120.$$

Nun ni serĉu naturajn valorojn por x kaj y , ĉar ties nombroj estas ja entjeroj, ne negativaj.

Estas multaj solvoj, jen kelkaj:

¹⁴ Monunuo dum Mezepoko

infanoj virinoj viroj

50	10	20
53	5	22
47	15	18
44	20	16
41	25	14
38	30	12
35	35	10
36	40	8
29	45	6
26	50	4
23	55	2

- **Simila problemo¹⁵:**

Per 100 Lekoĵ aĉetu 100 fruktojn: pomojn je 5L ĉiu, pirojn je 3 L ĉiu kaj prunojn je 10 prunoj po 1 Leko.



Solvo:

Pli libera rezonado estus la jena:

Certe, pli da fruktoj estus la prunoj. Sed ties nombro devas esti multoblo de 10, kontraŭe, ni ne povas kunakordigi la ciferojn por x kaj y . Se ni supozu

$z = 80$, rezultiĝas ke $x + y = 20$.

Se ni prenu $y = 4$ kaj $x = 16$

tiam la unua kondiĉo $80 + 16 + 4 = 100$ plenumiĝas.

¹⁵ Ĉi tiu problemo prezentiĝis per diversaj tekstoj kaj vekis multe da intereso ankaŭ ĉe miaj gelernantoj (Aŭtoro: B. S.)

Ankaŭ la dua kondiĉo $80 \cdot 01 + 16 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 8 + 80 + 12 = 100$, plenumiĝas.

Oni povas trovi ankaŭ aliajn solvojn kiel ĉi tio.

Sed ĝenerale oni rezonas tiel:

$$x + y + z = 100$$

de kie

$$z = 100 - (x + y).$$

Aliflanke

$$5x + 3y + 01z = 100$$

aŭ

$$5x + 3y + 0.1(100 - x - y) = 100$$

De kie

$$5x + 3y + 10 - 0.1x - 0.1y = 100$$

$$4.9x + 2.9y + 10 = 100$$

de kie

$$49x + 29y = 900$$

$$49x = 900 - 29y$$

$$x = (900 - 29y) / 49$$

Por ke x estu entjeron devas ke $(900 - 29y)$ estu multoblo de 49.

Ni kontrolu kiuj valoroj de y kontentigas ĉi kondiĉon kaj ni trovos:

Provante laŭvice $y = 1$; $y = 2$; $y = 3$; ni trovos ke $y = 4$

Ni ekhavos:

$$900 - 29 \cdot 4 = 900 - 116 = 784$$

$$784: 49 = 16$$

Do, unu solvo estas la triopo (16, 4, 80). Sed tio ne estas unika. Trovu aliajn solvojn!

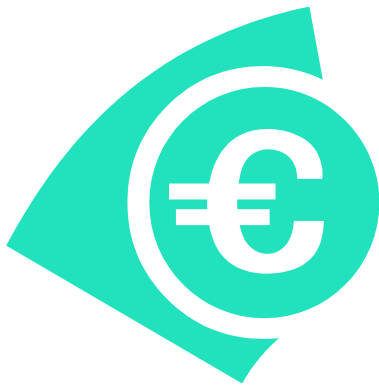
- **Provu mem ke per:**

20 moneroj de tri specoj 50 L, 20 L kaj 5 L formu sumon el

a) 500 L

b) 300 L

c) 200 L



- *Aŭ per 15 moneroj 0.5 L, 10 L, kaj 5 L formu sumon el 100 Lekoj*

- **Donu**

Donu al mi 20 monerojn tri specaj: 50 L, 20 L kaj 10 L por ke ilia entuta valoro estu 500 L (aŭ 300 L, aŭ 200 L).



Moneroj el la tempo de imperiestro Teodoso I

Solvo

Ni formu la ekvaciojn:

$$50x + 20y + 10z = 500$$

$$x + y + z = 20$$

$20 \geq x, y, z \geq 0$ same estas entjeroj.

Dividinte per 10 la unuan ekvacion kaj anstataŭiginte $z = 20 - (x + y)$ ni ekhavas

$$5x + 2y + 20 - x - y = 50$$

$$\text{Aŭ } 4x + y = 30$$

$$\text{Aŭ } y = 30 - 4x$$

Prikonsiderinte la kondiĉon ke y estas ja natura nombro, ni provu diversajn valorojn de x :

Por $x = 1$ rezultiĝas $y = 26$, ne akceptebla.

Por $x = 2$ rezultiĝas $y = 22$, ne akceptebla.

Por $x = 3$ rezultiĝas $y = 18$ ne akceptebla ĉar $3 + 18$ estas pli ol 20

Por $x = 4$ rezultiĝas $y = 14$ akceptite, ĉar rezultiĝas $z = 2$.

$$\text{Pruvo : } 4 \cdot 50 + 14 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 200 + 280 + 20 = 500$$

Por $x = 5$ rezultiĝas $y = 10$ kaj $z = 5$, akceptebla

Por $x = 6$ rezultiĝas $y = 6$ kaj $z = 8$, akceptebla

Por $x = 7$ rezultiĝas $y = 2$ kaj $z = 11$ akceptebla

Por $x = 8$ rezultiĝas $y = -2$ ne akcepteblaj.

- **Najloj**

Ĉu ni povas pakigi 140 kg da najloj en tri specoj de kestegoj je kapacito respektive 16 kg, 17 kg kaj 40 kg?



Solvo

Ni skribu la ekvacion

$$16x + 17y + 40z = 140$$

Tio estas ekvacio kun naturaj koeficientoj. Ni rimarkas ke y ne povas esti nul, kontraŭe la ekvacio $16x + 40z = 140$ havus solvon kio kontraŭdiras al la fakto ke 140 ne divideblas per la plej granda divizoro de $(16, 40) = 8$. Sed ankaŭ la numero x ne povas esti nul, kontraŭe ni ricevus la ekvacion

$$17y = 140 - 40z = 10(14 - 4z)$$

kaj ne negativa numero $(14 - 4z)$ dividiĝus per 17 por entjeroj ne negativaj z , kio maleblas.

Fine, la numero z ne povas esti nul, kontraŭe el la egalaĵo

$$17y = 140 - 16x = 4(35 - 4x)$$

sekvus ke la numero $35 - 4x$ estus multoblo de 17 por $x > 0$, kio maleblas same.

Tiamaniere, la nombroj x , y kaj z devas esti pozitivaj dum la nombroj

$x' = x - 1$; $y' = y - 1$; $z' = z - 1$ entjeroj, kontentigantaj la ekvacion

$$16x' + 17y' + 40z' = 67$$

$$[16(x - 1) + 17(y - 1) + 40(z - 1) = 16x + 17y + 40z - 16 - 17 - 40] = 140 - 73 = 67]$$

Similaj rezonadoj montras ke $y' \neq 0$ kaj $x' \neq 0$, t. e. la nombroj

$x'' = x' - 1$ kaj $y'' = y' - 1$ devas kontentigi la ekvacion

$$16x'' + 17y'' + 40z' = 34$$

Ĉi ekvacio kun entjeraj ne negativaj koeficientoj havas la ununuran solvon

$$x'' = 0 \text{ kaj } y'' = 2 \text{ kaj } z' = 0.$$

Tiel, revenante al la unuaj nekonataj kvantoj, ni ricevos la ununuran solvon de la inica ekvacio:

$$x = 2; y = 4 \text{ kaj } z = 1,$$

t. e. 140 kg da najloj povas enmetiĝi nur en 2 kestegoj po 16 kg, en 4 kestegoj po 17 kg kaj en unu kestego po 40 kg. .

- **La karbo**

En la stacidomo oni alportis 420 tunojn da karbo per vagonoj je kapacito 15 t, 20 t kaj 25 t. Kiom da tiaj vagonoj estis respektive se entute estis 27?



Solvo

Ni notu per x , y kaj z la serĉatajn nombrojn de la vagonoj. Tiam formiĝas la ekvacio

$$15x + 20y + 25z = 420$$

Preter ĝi estas ankaŭ la ekvacio

$$x + y + z = 27$$

t. e. la nombroj y kaj z devas kontentigi la ekvacion

$$15(27 - y - z) + 20y + 25z = 420 \text{ je naturaj koeficientoj}$$

Transforminte ĝin

$$y + 2z = 3$$

rezultiĝos $y = z = 1$ kaj $x = 25$.

Do estas uzitaj 25 vagonoj je 15 tunoj kaj po unu vagono je 20 kaj 25 tunoj.

• La nombroparo

Ni konsideru du nombrojn, x_0 kaj y_0 kontentigantaj la ekvacion

$ax + by = c$ je entjeroj, reciproke primaj, a kaj b . Nun provu ke la formuloj

$x = x_0 + bk$ kaj $y = y_0 - ak$ por k entjero, donas ĉiujn solvojn de ĉi tiu ekvacio.

Pruvo

Se la nombroparo x, y preter la nombroj x_0, y_0 kontentigas la ekvacion $ax + by = c$ je entjeraj koeficientoj a kaj b , tiam ni havus

$$ax + by = c = ax_0 + by_0 \text{ de kie } a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Ĉar la nombro $x - x_0 = b(y_0 - y) / a$ estas entjero, dum la nombroj b kaj a ne havas komunan divizoron, tiam la nombro $k = (y_0 - y)/a$ estas same entjero.

Tial $x - x_0 = bk$ kaj $y - y_0 = -ak$ de kie rezultiĝas la egalajoj

$$X = x_0 + bk \text{ kaj } y = y_0 - ak$$

Do, ni ĵus pruvis ke ĉiu solvo de la ekvacio akireblas per la montritaj formuloj. Aliflanke, por ĉiu entjero k ni havus

$$a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = ax_0 + by_0 = c$$

t. e. la formuloj donas ĝuste nur la solvojn.

- **La sakoj**

Por transportado de tritiko disponeblas sakoj je kapacito 60 kg aŭ 80 kg. Kiom da tiaj bezonatas por ŝarĝo je 1 tuno por ke la sakoj pleniĝu komplete? Kiu estas la malplej granda nombro da tiaj?



Solvo

Ni notu per x kaj y la nombrojn de la sakoj. Ili kontentigas la ekvacion

$$60x + 80y = 1000$$

Reduktas ĝin al $3x + 4y = 50$

Tio estas ekvacio je ne negativaj entjeraj koeficientoj. Unu solvaĵo de ĉi tiu ekvacio troveblas facilmaniere se ni utiligas la egalaĵon

$$- 3 \cdot 50 + 4 \cdot 50 = 50$$

Prikonsiderinte la formulojn de la ĝenerala solvado de la supra tasko, ni akirus ĉiujn solvaĵojn je entjeroj de ĉi ekvacio:

$$x = -50 + 4k \quad y = 50 - 3k$$

Nun por ke trovu ĉiujn naturajn solvaĵojn, ni notu la limigojn:

$$4k - 50 \geq 0 \text{ kaj } 50 - 3k \geq 0 \text{ de kiuj ni ricevos}$$

$$12 < 50 \leq k \leq 50/3 < 17$$

Tiel, provante laŭvice $k = 13, 14, 15, 16$, ni trovos ĉiujn ne negativajn solvaĵojn:

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 11$$

$$x_2 = 6 \quad y_2 = 8$$

$$x_3 = 10 \quad y_3 = 5$$

$$x_4 = 14 \quad y_4 = 2$$

La malplej granda kvanto de la sakoj jenus $x + y = 13$ kiu estas ja la unua solvaĵo ĉi supre.

- **La boteloj**

Bezonatas boteloj je kapacito 0.7 litroj kaj 0.9 litroj por ke entenu complete kvanton da 20.5 litroj de fruktolikvaĵo. Kiom da boteloj respektive ni devas havigi al ni? Kiu estus la ties minimala kvanto?



Solvo

La problemo kondukas al la ekvacio

$$0.7x + 0.9y = 20.5$$

je entjeraj koeficientoj.

Transforminte, ĝi akiras la formon $7x + 9y = 205$

Anstataŭiginte sinsekve ni akiros la egalaĵojn

$$7x + 9y = 7(x + y) + 2y = 7u + 2y = u + 2(y + 3u) = u + 2v = 205$$

$$\hat{\text{Ci tie }} x + y = u \text{ kaj } y + 3u = v$$

El ĉi tiuj egalaĵoj ni havus

$$u = 205 - 2v$$

$$y = v - 3u = v - 3(205 - 2v) = 7v - 615 \geq 0$$

$$x = u - y = 205 - 2v - (7v - 615) = 820 - 9v \geq 0$$

$$87 < 615/7 \leq v \leq 820/9 < 92$$

Metante $v = 88, 89, 90, 91$ akireblos kvar solvaĵoj:

$$x_1 = 28 \text{ kaj } y_1 = 1$$

$$x_2 = 19 \text{ kaj } y_2 = 8$$

$$x_3 = 10 \text{ kaj } y_3 = 15$$

$$x_4 = 1 \text{ kaj } y_4 = 22$$

La malplej granda kvanto de $x + y = 23$ certiĝas per la kvara solvaĵo.



- **La patro kaj tri filoj**

Patro donis al siaj tri filoj respektive 50, 30 kaj 10 ovojn por ke ili vendu ilin en la bazaro.

Ĉi lastaj iris al la bazaro antaŭtagmeze kaj vendis parton de la ovoj kunportitaj, je sama prezo. Posttagmeze ili vendis la restintan parton sed je same plialtiĝinta prezo. Reveninte hejme, ĉiu el li enmanigis al la patro po 10 dolaroj. Sed la patro iom pripensinte, konstatis ke du unuaj filoj estis trompintaj lin enmanigante po 10 dolaroj, ĉar fakte ili estis enspezinta iom pli ol 10 dolaroj. Kiel rezonis la patro?



Solvo

Ni notu per x , y kaj z la nombrojn de la ovoj venditaj antaŭtagmeze de ĉiu el la filoj. Kompreneble, la respektivaj nombroj por posttagmeza vendado jenas: $(50 - x)$, $(30 - y)$ kaj $(10 - z)$. Ni notu per a la prezon de la ovoj antaŭtagmeze kaj per b tiun posttagmeze. Tiam ni havus:

$$ax + b(50 - x) = 10$$

$$ay + b(30 - y) = 10$$

$$az + b(10 - z) = 10$$

Ni esploru la lastan egalaĵon. Faktorizinte z ni havus

$$z(a - b) + 10b = 10.$$

De ĉi tie

$$z(a - b) = 10 - 10b = 10(1 - b) \text{ kaj } z = 10(1 - b)/(a - b).$$

Ĉar $z \leq 10$ la frakcio $(1 - b)/(a - b)$ akiros la valorojn 0 aŭ 1. Por la valoro 0 rezultiĝas $b = 1$ dolaro. Se la unua kaj la dua filoj postlasus nevenditajn ovojn por posttagmezo ni havus:

$$ax + 1(50 - x) = 10 \text{ aŭ}$$

$$x(a - 1) = -40 \text{ aŭ } x = 40/(a - 1)$$

Ĉi tie a povas ricevi tiajn valorojn ke x rezultiĝu entjero, same a devas esti < 1 . Tio maleblas.

Se la unua kaj la dua filoj estus vendintaj la ovojn antaŭtagmeze, la unua enspezus > 10 dolarojn. Dum la dua devus vendi ilin $30a = 10$ de kie $a = 1/3$ dolaroj.

La tria filo devus vendi la ovojn posttagmeze $10 \cdot 1 = 10$ dolaroj. .

Se ni akceptus la valoron 1, tio kondukus al la egalaĵo $1 - b = a - b$ aŭ $a = 1$ dolaro. .

Ĉi kaze la tria filo devus vendi ĉiuj siajn ovojn antaŭtagmeze $10 \cdot 1 = 10$ dolaroj. Dum la unua certe enspezis pli ol dek dolaroj ĉar li posedis 50 ovojn kaj

$x \cdot 1 + (50 - x)b$, kie $b > 1$ dolaro, rezultigas monsumon pli ol 10 dolarojn.

Samtiel, la dua filo $y \cdot 1 + (30 - y)b$ kie $b > 1$ rezultigos monsumon pli ol 10 dolarojn.

Se ni kondiĉigas ke nepre la tri filoj estas vendintaj ovojn antaŭtagmeze kaj posttagmeze, tiam la tria filo kvitiĝas dum la unua kaj la du filoj rezultiĝas trompintoj.

Tial la patro suspektis ke la du unuaj siaj filoj trompis lin.

- **La decido de la guberniestro**



“Guberniestro de iu lando, motiviĝinte nur je militistaj celoj, estis decidinta ke ĉiu familio ekhavu maksimume unu filinon. Do ĉiu virino havis kiel solan aŭ lastan gefilon, knabinon. Ĉu vi povas diri kiun parton konsistigis la knaboj en la entuta nombro de geinfanoj de tiu lando?”

Solvo

Ni supozu ke N estas la nombro de la patrinoj kiuj havas kiel solan aŭ lastan gefilon unu knabinon. Do entute estas N knabinoj ĉe ili.



Kaj kiom da knaboj estas ĉe ili? La duono el ili ne havas knabojn, ĉar la probablo ke la unua gefilo estu knabino estas $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{4}$ de la patrinoj havus po unu knabon, ĉar $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$ kiu estas la probablo ke la unua gefilo estu knabo kaj la dua knabino. Ties $\frac{1}{8}$ havus po du filoj (la rezonado estas tutsimila kiel supre). Samtiel. $\frac{1}{16}$ de ili havus po tri filoj ktp.

Entute fariĝus

$$N/4 * 1 + N/8 * 2 + N/16 * 3 + \dots + N/2^{n+1} * n + \dots = N/4 [1/2^0 + 2/2^1 + 3/2^2 + \dots + n/2^{n-1} + \dots]$$

Sed estas sciite ke $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = 1/(1-x)^2$ ĉar tio estas ja la derivaĵo de la geometria progresio $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = 1/(1-x)$

Metante $x = 1/2$ ni trovos ke $1/2^0 + 2/2^1 + 3/2^2 + \dots + n/2^{n-1} = 1/(1 - 1/2)^2 = 4$.

De ĉi tie sekvas ke entute knaboj estas

$$N/4 * 4 = N$$

t. e. tutsame kiom da knabinoj!

Do, la parto de la knaboj estas ĝuste $1/2$ sendepende de la envana decido de guberniestro.

• La plej bona veturmaniero

Pripensu iomete, kioma estas la plej bona veturmaniero: trairi la tutan vojon per biciklo aŭ trairi la ties duonon per motorciklo je rapideco kvinoble de tiu per biciklo kaj la ceteron surpiede je rapideco la duonon de tiu per biciklo?



Solvo

Por trairi la tutan vojon per biciklo bezonatas malpli da tempo, ĉar tiom da tempo bezonus nur la traĵo de ties duono surpiede (je rapideco duonon de la biciklo) al kiu aldonendas la tempo necesa por trairi la duan duonon de la vojo per motorciklo, kiu estas pozitiva kiom malgranda estu ĝi (eĉ se la rapideco de la motorciklo estus ne nur kvinoble sed kia ajn oblo pli granda ol tiu de la biciklo).

- **La duono de la vojo kaj la duono de la tempo**

Kio estas pli malgranda tempo: trairi la duonon de la vojo surpiede kaj la ceteron aŭte, aŭ la duonon tempon elspezi por trairi surpiede parton de vojo kaj la alian duonon tempon per aŭte?



Solvo

Samtiel en la ĉi supra problemo ankaŭ la kuranta povas solviĝi parkere. Se ni piediras kaj veturas per aŭto saman tempodaŭron, tiam la trairita vojo per aŭto nature pligrandas ol tiu trairita surpiede. Sekve, ĉi kaze per aŭto ni povas trairi pli ol la duonon de la vojo, kio nature postulus malpli da tempo ol ke tio dum la trairado per aŭto ĝuste la duonon de la vojo. .

- **Unu biciklo por du personoj**

Du turistoj volas iri al vilaĝo je 30 km for de la loko kie troviĝis ili. Cetere ili havas je dispono nur unu biciklon unusidlokan. Kiamaniere devas ili aranĝi la veturadon per ĝi por ke atingi la vilaĝon plej baldaŭe? La rapidecon de la piediranto konsideru egala al 5 km/horo dum tiu de biciklo 15 km/horo.



Solvo

Se turisto trairinte per biciklo la duonon de la vojo t. e. 15 km, dum unu horo, lasas la biciklon kaj daŭras la vojon surpiede dum pliaj tri horoj (3x5), tiam entute li elspezas kvar horojn. La alia turisto, kontraŭe, la tri unuajn horojn elspezas surpiede kaj atinginte la biciklon, li uzas ĝin kaj atingas la vilaĝon post plia horo, elspezinte tiel entute same kvar horoj. Tiel ambaŭ turistoj, ekirinte samtempe, atingeblas la vilaĝon samtempe.

- **Du bicikloj por tri turistoj**

Tri turistoj volas iri al vilaĝo per du bicikloj (unusidlokaj). Kiamaniere ili devas aranĝi la moviĝon por ke atingu plej baldaŭe la vilaĝon ĉiuj tri?



Solvo

Oni povus aranĝi la moviĝon tiel: Du turistoj ekveturas per bicikloj dum la tria surpiede samtempe. La unua turisto veturas $\frac{2}{3}$ de la vojo ĝis la vilaĝo, poste lasas la biciklon kaj daŭrigas surpiede. La dua turisto pasigas $\frac{1}{3}$ de la vojo, poste lasas la biciklon kaj daŭrigas la vojon surpiede ĝis li atingas la biciklon lasita de la unua turisto per kiu li ĝisveturas en la vilaĝon. Fine, la tria turisto pasigas $\frac{1}{3}$ de la vojo surpiede, poste surbicikliĝas kaj veturas per biciklo ĝis la vilaĝo.

Sekve, ĉiuj tri turistoj atingas la vilaĝon samtempe.

- **Motorciklo dusidloka**

Ĉu eblas ke tri turistoj posedante nur un motorciklon dusidlokan trairi la vojon el 60 km dum tri horoj? La rapideco de la piediranto estas 5km/horo dum tiu de motorciklisto 50 km/horo.



Solvo

Jes, tio eblas. La moviĝo povas aranĝiĝi tiel: Du turistoj ekiras per motorciklo, la tria surpiede. Post unu horo, unu turisto elmotorcikliĝas kaj daŭrigas la reston de la vojo (10 km) surpiede. La dua turisto turniĝas malantaŭen per motorciklo kaj renkontas la trian turiston dumvoje, enmotorcikligas lin kaj daŭrigas la vojon antaŭen.

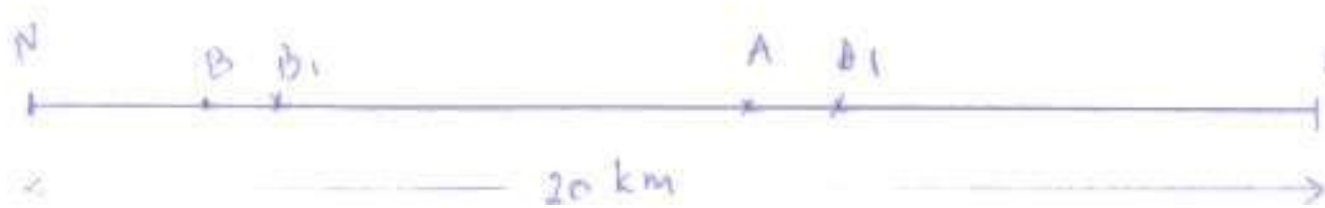
Ni nun provu ke la lasta ago, la turniĝo malantaŭen, bezonas malpli ol du horojn. Envere, dum unu horo, post kiam komenciĝis la moviĝo la distanco inter la motorciklisto kaj la tria turisto estas 45 km, dum tiu inter la tria turisto kaj la lasta punkto 55 km. Eĉ se la tria turisto haltus atendente la motorcikliston, la ĝenerala distanco $45 + 55 = 100$ km trairitus de motorciklisto dum du horoj. Des pli rapide tio okazas se la tria turisto daŭrigas la vojon surpiede alfrontiĝante la motorcikliston, tiel plikurtigante la traïrotan distancon.

• La kolono de la soldatoj

Marŝanta kolono de soldatoj disponis kamionon kiu apenaŭ porteblus ĉiujn soldatojn. Tamen, parto el il enkamioniĝis dum la cetero daŭrigis la vojon surpiede ĝis iu loko. Poste la kamiono forlasis la soldatojn kaj turniĝis al la alia piediranta parto, por ke ankaŭ ili ĝuu la veturadon per kamiono. La rapideco de la kamiono estis kvinoble pli granda ol tiu de la piedirantaj soldatoj. La vojo longis 20 km. Dum kiom da horoj longis tiu veturado se ni konsideru tion kombinitan? T. e. parte surpiede, parte surkamione.



Solvo



Ni notu per x la rapidecon de la soldatoj kaj $5x$ tiun de la kamiono. MN estu la tuta vojo kaj A punkto kie la kamiono forlasas la unuan parton de la soldatoj kaj turniĝas preni la ceteron.



Kompreneble $NA = 5x$. Dume $AB = x$

La kamiono turniĝas je rapideco $5x$ dum la kolono daŭrigas je rapideco x , do la komuna rapideco estas $6x$. La kamiono kaj la kolono renkontiĝas en la punkto B_1 , ie inter B kaj A.

$$BB_1 = x + \frac{1}{6} \cdot 4x = x + \frac{2}{3}x.$$

La unua parto de soldatoj dumtempe estas marŝinte ankaŭ ĝi $\frac{2}{3}x$, do $AA_1 = \frac{2}{3}x$.

Por ke la kamiono atingu denove la soldatojn fine de la vojo NM ĝi devas trairi denove vojon je $5x$. Turniĝinte, ĝi renkontas la lastajn soldatojn je distanco $2(x + \frac{2}{3}x)$ de la punkto N. Ĉi kaze formiĝas la ekvacio

$$20 - 2(x + \frac{2}{3}x) = 5(20 - 5x - x - 2 \cdot \frac{2}{3}x)$$

$$\text{Aŭ } 20 - 2x - \frac{4}{3}x = 100 - 30x - \frac{20}{3}x$$

$$28x + 16x/3 = 80$$

$$x = 240/100 = 2.4 \text{ km}$$

Do, la kamiono estas trairinta

$$2*5x + 2x(5/6 - 4x) + 20 - 2x - 4x/3 = 10x + 20/3 - 2x - 4x/3 = 8x + 16x/3 + 20 =$$

$$8*2.4 + 16*0.8 + 20 = 19.2 + 12.8 + 20 = 52 \text{ km}$$

Respondo: La tempo $52:20 = 2.6$ aŭ 2 horoj kaj 36 minutoj

- **Du motorciklistoj**

Du motorciklistoj ekiris samtempe de iu loko por ripozo. Ambaŭ trairis egalajn distancojn kaj turniĝis samtempe. Sed dumvoje ili paŭzis, unu veturis duoble pli da tempo ol ripozis la dua. Sed la dua moviĝis trioble pli longe ol ripozis la unua. Kiu moviĝis pli rapide?



Solvo

Ni notu la tempon de la unua per x kaj tiun de la dua per y . Tiam la tempo de la ripozo por la unua estis $y/3$ dum tio de la dua $x/2$. Ni formu la ekvacion

$$x + y/3 = x/2 + y$$

De tio sekvas ke $x = 4/3 y$ tio estas $y < x$

Do, pli rapide moviĝis la dua motorciklisto.

La nombroj de Fibonaĉi



Leonardo da Pisa, ☞ Fibonacci (estas vivinta en la jaroj 1170 - 1240)

Ni esploru komence du problemetojn

Oni plantis arbon januare. Post du monatoj ĝi lanĉis novan branĉon. Ĉiu nova branĉo kreskiĝas du monatoj kaj poste ankaŭ ĝi lanĉas siaflanke alian novan branĉon. Post la dua monato ĉiu branĉo lanĉas ĉiunmonate novan branĉon. Kiom da branĉoj estos je jarfine?



Respondo

Ni havas ĉi serion: Komence 1; post la unua monato denove 1; post du monatoj 2; post tri monatoj 3; post kvar monatoj 5; post kvin monatoj 8; post ses monatoj 13; post sep monatoj 21; post ok monatoj 34; post naŭ monatoj 55; post dek monatoj 89; post dek unu monatoj 144; post dek du monatoj 233 branĉoj

Do jarfine estos 233 branĉoj.

- *Geparo de leporoj naskas novan geparon post du monatoj kaj poste ĉiun monaton naskas po unu novan geparon. Ankaŭ la novaj geparoj*

agaz tiamaniere. Trovu la nombron de leporaj geparoj post 6 monatoj.



Respondo

Januaro	1	
Februaro	1	
Marto	2	
Aprilo		3
Majo	5	
Junio	8	
Julio	13	

Do, post ses monatoj estos 13 geparoj.

Rimarkeblas ke oni aplikas la formulon $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Simile

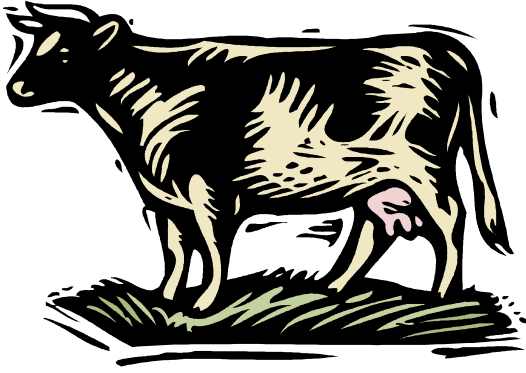
- *Ni enfermigu geparon de leporoj en kaĝo kaj nutrigu ĝin. Ni supozu ke komencante post du monatoj, ĉiun postan monaton la geparo naskas novan geparon kaj nova geparo post du monatoj agas similmaniere. Kiom da geparoj estos post unu jaro?*

Solvo: La serĉata nombro akireblas ĉe la serio de Fibonaĉi, konkrete:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Post 12 monatoj estos 144 geparoj.

- **La problemo de la hinda matematikisto Nasajama, XIV jarcento**



Bovino naskas ĉijare po unu inan bovidon kiu, siaflanke, post du jaroj komencas naski mem po unu inan bovidon ĉiujare. Ĉu vi povas diri kiom da bovoj estos entute post dudek jaroj (supozinte ke ĉiuj vivas)

Solvo:

Je la jaro nul ni havas 1 bovon

Je la unua jaro ni havas unu bovon plus unu bovidon, du kapoj

Je la dua jaro ni havas plian bovidon do entute tri bovoj.

Je la tria jaro pliiĝas ankaŭ du bovidoj, do estiĝas 5 bovoj.

Je la kvara jaro pliiĝas 3 bovidoj, do entute estos 8 bovoj.

Je la kvina jaro pliiĝas 5 bovidoj do entute estos 13 bovoj.

Do ni akiras la serion 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34;

Rimarkeblas ĉi relacio inter la postsekvaj kaj antaŭsekvaj terminoj:

$x_3 = x_2 + x_1$; $x_4 = x_3 + x_2$ kaj tiel plu. Tiaj relacioj, konjektoj nomiĝas “rekurentaj”.

Ĝenerale je la n - a jaro ni havos

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Tiam por la jaro XX

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711

Respondo: Post 20 jaroj estos 17711 kapoj

□ La poto

Je kiom da manieroj oni povas malplenigi poton je kapacito 10 litroj helpe de du ujoj je kapacitoj respektive 1 litro kaj 2 litroj.



Solvo

Ni notu per u_n la nombron de la manieroj per kiuj ni povas malplenigi la poton je kapacito n litroj helpe de du ujoj je kapacitoj 1 kaj 2 litroj.

La poto el n litroj malpleniĝas se ni uzas jen la ujon el 1 litro, ĉerpante poste ankaŭ $(n - 1)$ litroj el la ujo, jen per la ujo el 2 litroj kaj tiam ni devas ĉerpi ankoraŭ $(n - 2)$ litroj.

Ĉi kaze ni akiros la rilaciojn

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Evidente ke $u_0 = 1$ kaj $u_1 = 1$

Ni ricevos laŭvice

$u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$; $u_6 = 13$; $u_7 = 21$; $u_8 = 34$; $u_9 = 55$; $u_{10} = 89$.

Tiel ekzistas 89 manieroj por malplenigi la poton je kapacito 10 litroj helpe de du ujoj je kapacitoj 1 kaj 2 litroj.

La naciaj ŝuldoj¹⁶

¹⁶ La problemo estas sugestita de itala kolego

Laŭ lastaj donitaĵoj, por elpagi la ŝuldojn, ĉiu el 56 milionoj de italoj devas kontribui po 9 mil eŭroj. Fremdulo riskema ofertis fari tion mem per banknotoj po 10 dolaroj. Ni supozu ke 1 dolaro = 0.8 eŭroj kaj stako el 100 banknotoj el 10 dolaroj dikas 1.5 cm. Tiam diru kiom da km dikiĝus la stako de la banknotoj de misterioza financisto



Solvo

9000 euro : 0.8 = 11250 dolaroj

56 000 000 x 11250 dolaroj = 63 000 000 000 dolaroj.

63 000 000 000 : 100 = 630 000 stakoj po 100 banknotoj el 10 dolaroj.

630 000 x 1.5 cm = 945 000 cm = 9.45 km

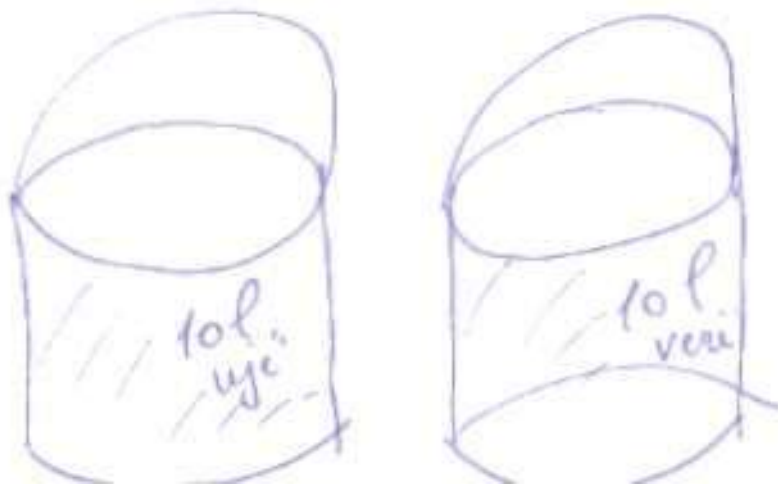
Problemoj kun vinoj

Estis tre popularaj en Eŭropo kelkaj centjaroj antaŭe.



- **La miksado de la vino kun akvo**

Ni supozu ke je nia dispono estas du ujoj entenantaj respektive 10 litroj da vino kaj 10 litroj da akvo. El la ujo kun akvo ni ĉerpu 3 litroj kaj enverŝu tion en la ujon kun vino. Ni miksu tion, poste ĉerpu el ĝi 3 litrojn kaj enverŝu en la ujon kun akvo. Nun ni demandu: kio estas pli, akvo en la ujo kun vino aŭ vino en la ujo kun akvo?



10 litroj da akvo kaj 10 litroj da vino

Solvo:

En la ujo kun vino ni enverŝis 3 litroj, do tie nun estas 13 litroj. El tio $\frac{3}{13}$ estas akvo kaj $\frac{10}{13}$ vino.

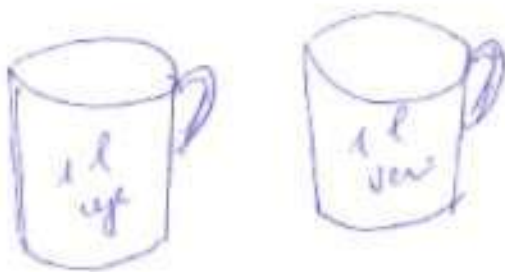
En la ujo kun akvo restis 7 litroj. Kiam ni enverŝas 3 litroj el la miksaĵo tie estos $3 \cdot \frac{10}{13}$ litroj da vino. En la dua ujo restos $3 - \frac{9}{13}$ litroj da akvo. (ni demetis $3 \cdot \frac{3}{13}$ litroj da akvo). Sed $3 - \frac{9}{13} = \frac{39}{13} - \frac{9}{13} = \frac{30}{13}$.

Sekve, la akvo en la ujo kun vino estas ĝuste tiom, kiom la vino en la ujo kun akvo.

Noto: La rezultato samas ankaŭ se la kvantoj de la likvaĵoj en ĉiu ujo malsamus. La rezonado povus esti ankaŭ la jeno: en la ujo kun vino estas transpasinta kvanto da akvo egala al la kvanto de vino transpasinta en la ujon kun akvo. Se la ujoj estas diversaj, tiam la kondiĉo estus ke nepre la niveloj de la likvaĵoj konserviĝu.

Tiamaniere solveblas ankaŭ la malsupra problemo:

- Du ujoj



1 litro da akvo kaj 1 litro da vino

Je nia dispono estas du ujoj ĉiu je kapacito pli ol 1 litro. En la unua oni estas verŝinta 1 litron da vino, en la alia 1 litron da akvo. Ni prenu unu kuleregon (1/4 Litro) kaj elĉerpu per ĝi vinon el la unua ujo kaj enverŝu tion en la duan. Miksinte ĉi lastan ni poste elĉerpu unu kuleregon da miksaĵo kaj enverŝu tion en la unuan ujon. Post tiu ago:

a) en la vinujo plurestas kelkiom da akvo dum en la akvujo kelkiom da vino. Kiu kvanto plias?

b) Ĉu la respondo dependas de la miksado?

c) Nun ni supozu ke tiu ago ripetigās kelkfoje kaj ĉiukaze ankaŭ la miksado. Kiom da vino estos en la unua ujo, kaj kiom da akvo estos en la dua ujo, post unu, du, tri, . . . n similaj agoj?

ĉ) Ĉu okazos iufoje ke la unua ujo enhavu pli da akvo ol vino? Aŭ egale, kiom da akvo tiom da vino?

d) Kiom da ir - revenoj bezonatas por ke la procento de la vino en la akvujo ŝanĝiĝu malpli ol 1% el 50%?

Aŭ la ĉi alia problemoj:

- **Du vinglasoj**



Surtable estas du samgrandaj vinglasoj. En ambaŭ estas sama kvanto da vino, sed en la unua estas ruĝa vino dum en la dua blanka vino. Ni elĉerpu kuleron da ruĝa vino kaj enverŝu ĝin en la blankan, poste miksu ĝin. Poste ni elĉerpu kuleron da miksaĵo kaj enverŝu ĝin en la ruĝvinan glason. . Ĉu vi povas diri: kiu kvanto plias, blanka vino en la unua aŭ ruĝa vino en la dua?

Solvo

Ni supozu ke en ĉiu glaso, ni nomu la ruĝa kaj la blanka, estas po 100 cl da likvaĵo. Komence ni prenis 10 cl da ruĝa vino kaj enverŝis ĝin en la 100 cl da blanka vino. En ĉi lasta estiĝis 110 cl da miksaĵo, el kiu 10 cl estas ruĝa. , aŭ $10/110 = 1/11$. Se ni elĉerpos el tiu miksaĵo unu kuleron el 10 cl da miksaĵo kaj enverŝos ĝin en la ruĝan glason, en ĉi lasta estos $9 \frac{1}{11}$ cl da blanka vino kaj $9 \frac{10}{11}$ ruĝa vino. Dume en la dua glaso restis same $9 \frac{1}{11}$ cl da ruĝa vno, do ambaŭ priesplorataj kvantoj egalas.

• Kafo kaj lakto

El glaso plenplena je kafo mi eltrinkis la duonon kaj anstataŭis tion per lakto. Poste mi eltrinkis unu trionon de la miksaĵo de kafo kun lakto kaj plenigis ĝin per tiom da lakto. Poste eltrinkis unu sesonon de la nova miksaĵo kaj plenigix ĝin per lakto. Nur post la lasta ago mi eltrinkis la tutan restintaĵon. Ĉu vi povas diri: kion mi eltrinkis plie, lakton aŭ kafon?



Solvo

La kvanto de la kafo dekomence estis unu glaso, dum la lakto enverŝita en ĝin estis komence duonglaso, poste unu trionon, poste unu sesono, do entute

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ glaso. Sekve mi eltrinkis egalajn kvantojn de kafo kaj lakto.

Problemoj kun variantaj grandoj

- Problemo de Njutono (1622 - 1727)



La statuo de Njutono en la univesitato de Oxford.

Brigado de falĉistoj devus elfalĉi du paŝtejojn, unu duoble pli granda ol la alia. La unuan duontagon la brigado elfalĉis la grandan paŝtejon, poste la duono de la brigado daŭigis la laboron en la granda paŝtejo kaj finigis tion vespere. La alia duono de la brigado transiĝis en la malgrandan paŝtejon kie vespere postlasis nefalĉita parton de paŝtejo falĉebla dum plia labortago por unu falĉisto. Trovu la nombron de la falĉistoj de la brigado.

Solvo

Ni notu per x la nombron de la falĉistoj

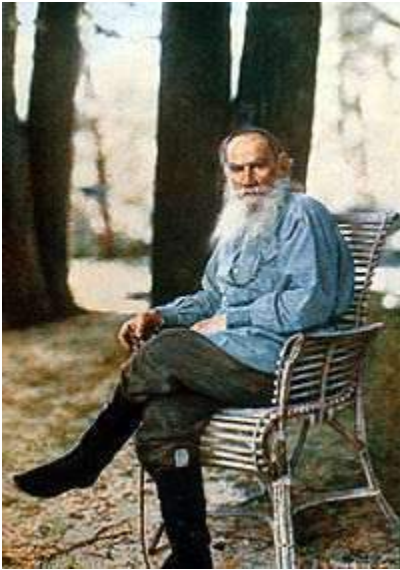
Unu falĉisto bezonas $(x + 1)$ labortagoj por ambaŭ paŝtejoj, ĉar ambaŭ paŝtejoj minus la postrestintan parton estis falĉitaj de x personoj dum unu labortago. La malgranda paŝtejo konsistigas $\frac{1}{3}$ de la tuta surfaco, tial unu falĉisto elfalĉas ĝin dum $(x + 1) / 3$ tagoj. La duono de la brigado elfalĉis la malgrandan paŝtejon dum duontago, sed estis bezonita ankaŭ $x/4$ labortago de unu falĉisto dum tuta tago, do entute $x/4 + 1$ tagoj. Egaliginte ambaŭ esprimaĵojn

$$(x + 1) / 3 = x/4 + 1$$

rezultiĝas $x = 8$

La dinamika versio de ĉi problemo aŭ

- **Problemo de Tolstoj**



Ljev Tolstoj (1828 - 1910)

Tri paŝtejoj kovritaj de herbaĵo je sama denseco kaj sama kreskeco sur ili havas la jenajn surfacojn:

3 1/3, 10 kaj 24 akroj (1 akro estas proksimume 0. 405 ha).

La unua paŝtejo nutrigas 12 bovinojn dum kvar semajnoj; la dua 21 bovinojn dum naŭ semajnoj. Kiom da bovinoj povas nutrigi la tria paŝtejo dum 18 semajnoj?



Solvo

Ni enmetu helpan nekonatan grandon y kiu notas la inican rezervon de la herbaĵo sur unu akro kreskanta je rapideco unu akro dum unu semajno.

En la unua paŝtejo la herbaĵo kreskiĝos je $3\frac{1}{3}^*$ y kaj dum kvar semajnoj estiĝos $3\frac{1}{3} y^*4 = 40/3$ y de la inica kvanto de la herbaĵo.

Ĉar y estas la kreskiĝo de la herbaĵo je 1 akro por 1 semajno, tiam la ĝenerala kvanto de la kreskiĝo de la herbaĵo je akroj estos (tiu dekomenca plus aldonon) $3\frac{1}{3} + 40/3y$

Tio signifas ke 12 bovinoj dum 4 semajnoj formanĝas la herbaĵon sur surfaco $3\frac{1}{3} + 40/3$ y kaj 1 bovino dum 1 semajno formanĝas $1/48$ aŭ $(10 + 40y) / 144$ akroj.

Per similaj elkalkuladoj por la dua paŝtejo ni havos:

Dum 1 semajno la kreskiĝo de la herbaĵo por unu akro estas y

Por 9 semajnoj tio estos 9y

Por 9 semajnoj en 10 akroj estos 90 y.

La rezervo de la herbaĵo sur la dua paŝtejo kaj ties kresko dum 9 semajnoj egalas al la kvanto de la herbaĵo sur surfaco $10 + 90y$ akroj (konvertita al surfacoj). Ĉi herbaĵon formanĝos 21 bovinoj dum 9 semajnoj.

Unu bovino dum unu semajno formanĝas $(10 + 90y) / (9 \cdot 21) = (10 + 90y) / 189$ akroj da paŝtejo.

Ĉar la konsumado de la herbaĵo de ĉiuj bovinoj supozigiĝas samkvanta, tiam la lasta nombro devas egaliĝi al tiu akirita por la unua paŝtejo.

$$(10 + 40y) / 144 = (10 + 90y) / 189$$

$$\text{De kie } y = 1/12$$

Sciante y, ni povas difini la surfacon de la paŝtejo, la efektivan rezervon de la herbaĵo nutrigonta unu bovinon dum 1 semajno, t. e. ni eltrovos la numeran valoron de

$(10 + 40y) / 144$ per $1/12$ rezultanta $5/54$ akroj

La tria paŝtejo el 24 akroj nutrigas x bovinon dum 18 semajnoj.

Tiucele bezonatas $5 \cdot 18 \cdot x / 54 = 5/3 x$ akroj da paŝtejo.

La kresko de la herbaĵo egalas al la rezervo el $24 \cdot 18 \cdot 1/12 = 36$ akroj.

La tuta herbaĵo dum 18 semajnoj egalas al la rezervo de herbaĵo de $24 + 36 = 60$ akroj.

$5/3 x = 60$ de kie $x = 36$ bovinon

Alia versio

- **La paŝtejo kaj la bovinon**

Sur paŝtejo kreskas la herbaĵo. Tie paŝtas 30 bovinon, kiu dum 4 tagoj formangas la tutan herbaĵon. Kiam kreskiĝis la nova herbaĵo tie paŝtis 25 bovinon formangintaj la tutan herbaĵon dum ses tagoj. Kio estus la maksimuma kvanto de bovinon paŝtantaj sur la paŝtejo tutan tempon (dum la herbaĵo daŭre kreskas)?



Solvo

Sur la paŝtejo dum la tuta tempo povas paŝtadi maksimume 15 bovinon.

Envere, ni notu per x la kvanton de la herbaĵo en la paŝtejo kaj per y kaj z la kvantojn de la herbaĵo kreskanta ĉiutage kaj formangate de unu bovinon samtempe. Tiam ni havos la ekvaciojn

$$x + 4y = 30 \cdot 4z$$

$$x + 6y = 25 \cdot 6z$$

De kie $15z = y$.

Tiel la herbaĵo en la paŝtejo kreskiĝas je tia rapideco ke tion povas formanĝi 15 bovinoj. La pruvado montras ke 16 bovinoj formanĝus la herbaĵon dum 60 tagoj.



Isaak Newton aĝule

Problemoj kun moviĝado

- Problemo de Kerolo



Japana kuriero

De la urboj A kaj B moviĝas kurieroj, uniforme sed je diversaj rapidecoj unu kontraŭ la alia. Post renkontiĝo, por atingi la difinitan lokon al la unua

bezonatas ankoraŭ 16 horoj, al la alia 9 horoj. Kiom da tempo bezonatas de ili por trairi la tutan vojon de A ĝis B?



Solvo

Ni notu la rapidecojn de la kurieroj respektive per u kaj v , dum la tempon ekde la komenciĝo de ilia moviĝo per t .

Al la unua kuriero por trairi la tutan vojon bezonatis $(t + 16)$ horoj, dum al la dua $(t + 9)$ horoj. La distanco inter la punktoj A kaj B povas esprimiĝi per 3 diversaj manieroj:

$(t + 16)u$; $(t + 9)v$; $t(u + v)$

Ni havas la egalaĵojn:

$$(t + 16)u = t(u + v) \text{ aŭ } 16u = tv \text{ aŭ } t = 16u/v$$

$$(t + 9)v = t(u + v) \text{ aŭ } 9v = tu \text{ aŭ } t = 9v/u$$

$$\text{De kie } 16u/v = 9v/u \text{ aŭ } u^2/v^2 = 9/16 \text{ aŭ } u/v = 3/4$$

Metante la trovitan valoron en la unua esprimaĵo por t , ni havas:

$$t = 16 \cdot 3/4 = 12$$

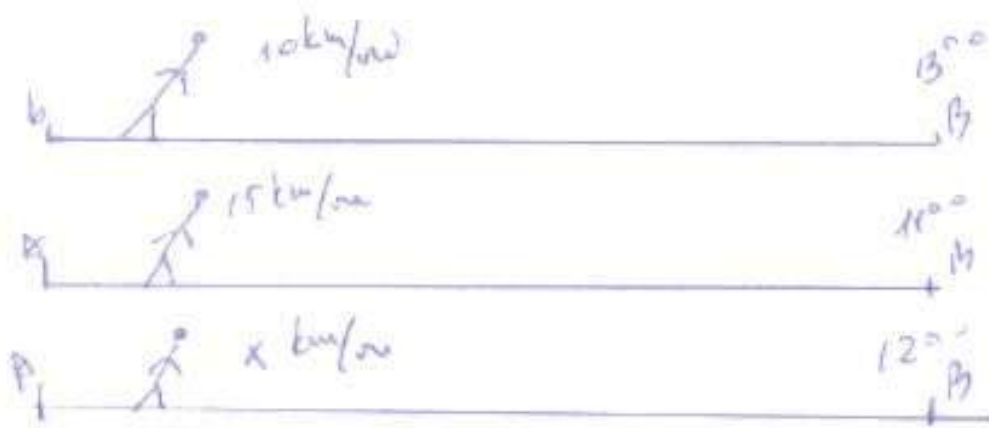
Do, al la unua kuriero por trairi la tutan distancon bezonatas $12 + 16 = 28$ horoj, dum al la dua $12 + 9 = 21$ horoj.

Vi povas prui la reponon konforme al la kondiĉoj de la problemo.

- **Rapideco**



Se ni marŝus je rapideco 10 km/horo ni atingus la difinitan lokon je 13 - 00 horo; se ni marŝus je rapideco 15 km/horo, ni atingus la lokon je 11 - 00 horo, kaj se ni marŝus je rapideco x km/horo ni atingus la lokon je 12 - 00 horo. Trovu x !



Solvo:

Ni devas marŝi je rapideco 12 km/horo.

(Ni notu la distancon per L . Tiam $L/10 = L/15 + 2$ de kie $L = 60$ km. La starto okazis je horo 7 - 00, ĝis 12 - 00 estas 5 horoj, do $60:5 = 12$ km/horo)

- **La rivero**

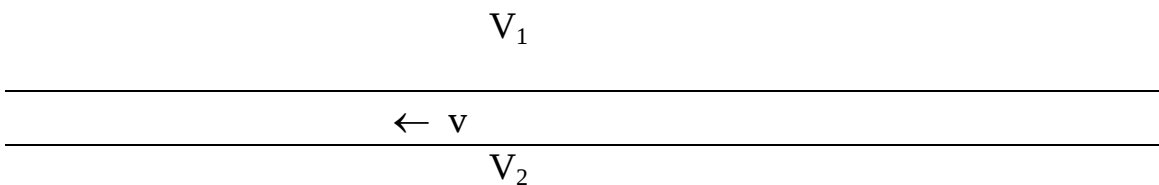


La naĝado en la rivero kontraŭ la fluo daŭras 1 horon, dum laŭ fluo nur 20 minutoj. Do por iri kaj reveni bezonatas 80 minutoj. Se tiutage blovas vento kaj la fluo estas duoble pli rapida tiam:

a) Kiom da tempo daŭros la naĝado iri kaj reveni?

b) Kiom da tempo daŭros ĝi se mankas la fluo, do en serena akvo?

Solvo:



Ni notu per v_1 kaj v_2 la rapidecojn kontraŭ la fluo kaj laŭ la fluo, per v la rapidecon de la fluo kaj v_0 la rapidecon de mem naĝanto en serena akvo.

Tiam $(v_0 - v) \cdot 1 \text{ horoj} = (v_0 + v) \cdot \frac{1}{3} \text{ horoj (20 min)}$ montras la egalajn vojojn dum iro kaj reveno de kie rezultiĝas $v_0 = 2v$

Se la fluo havus la rapidecon duoble pli granda kaj ne blovus vento kontraŭ la fluo, kompreneble la naĝanto apenaŭ naĝus kontraŭ la fluo ĉar ĉi kaze

$$v_1 = v_0 - 2v = 2v - 2v = 0.$$

Se blovus vento kontraŭ la fluo li havos ŝancon naĝi sed ĉi kaze bezonatas la rapideco de la vento.

Problemoj kun horloĝoj

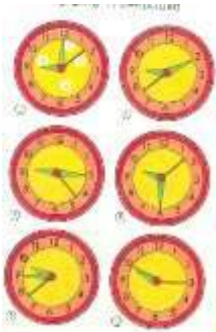
- Problemo de Ajnŝtajno



Horloĝo tre preciza havas sekundan montrilon kiu koincidas al la 12 - 00 horo sur la ciferblato 12. En ĉi tiu tempa punkto ĉiuj tri montriloj kuŝas ĝuste unu sur la alia. Tiel okazos, kompreneble ankaŭ post 12 horoj. Esploru, se ekzistas aliaj tempaj punktoj krom 12, kie la tri montriloj kuŝas ĝuste unu sur la alia. Kaj kiam la montriloj de horo kaj minutoj estas vertikalaj, kiom foje tio okazas dum 24 horoj?



Etula Ajnŝtajno



Ni donu la solvon por la dua kazo:

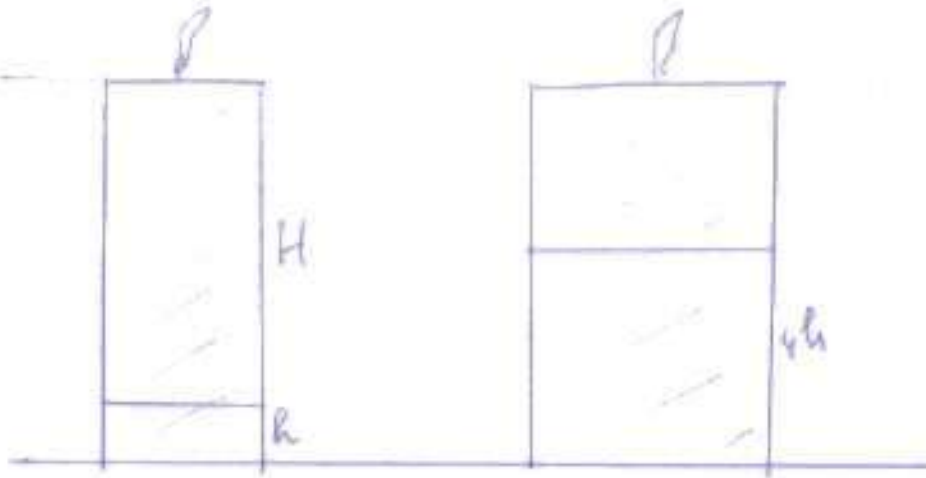
Dum 24 horoj la minuta montrilo estigas 24 rotaciojn, dum tiu de horoj 2 rotacioj. Se la hora montrilo ne moviĝus dum unu rotacio de la minuta montrilo, tiam ĉi lasta estus dufoje vertikala al tiu de horoj. Do, entute por 24 rotacioj li estus 48 fojoj vertikala al tiu. Fakte la hora montrilo moviĝas kaj la direkto de la moviĝado de la montriloj samas, tial la nombro de la ortanguloj malpliĝas je 2 por ĉiu rotacio, por la hora montrilo, entute 4 por 24 horoj. Tial, la montriloj estos vertikalaj unu al la alia 44 fojoj.

- **Kandeloj**

Du kandeloj je sama alteco sed diversa dikeco, konsumiĝas respektive dum 4 kaj 5 horoj. Oni ekbruligis ambaŭ ilin je oka horo. Post iom da tempo oni estingis ilin. Rimarkitis ke la dika kandelo plurestis kvaroble alta ol la maldika. Kioma horo estas nun?



Solvo



Ni notu per S_1 kaj S_2 la bazojn de la kandeloj
Tiam ilia volumeno estas:

$$V_1 = h \cdot S_1 \text{ kaj } V_2 = h \cdot S_2$$

Dum unu horo ili konsumas samkvanton de parafina materialo kaj

$$V_2/5 = V_1/4 \text{ de kie } V_2 = 5/4 \cdot V_1$$

El tio rezultiĝas ke

$$S_2 \cdot 4h = 5/4 \cdot S_1 \cdot h$$

$$\text{aŭ } S_2 = 5/16 \cdot S_1$$

Dum kelkaj horoj estas konsumite $S_1 (H - h)$, ose $S_2 (H - 4h)$

Nun ni havas la egalaĵojn

$$S_1/4 = S_2/5 \text{ aŭ } S_1 = 4/5 S_2$$

$$S_1 (H - h) = S_2 (H - 4h)$$

$$\text{aŭ } 4/5 \cdot S_2 (H - h) = S_2 (H - 4h)$$

$$\text{aŭ } 4/5 H - 4/5 h = H - 4h$$

$$1/5 H = 16/5 h$$

$$H = 16 h$$

Kompreneble jam pasintis 3 horojn ekde la ekbruliĝo de la kandeloj, ĉar 4h estas kvarono de 16 h.

Do, nun la tempo estas

$$8 + 3 = 11$$

Problemoj kun pesado

- Moneroj



08553cs-u fotosearch.com

La reĝo havis 30 vasalojn (dependulojn) kiuj pagis jaran tributon je 30 oraj moneroj. Sed unu el li trompadis la reĝon alportante falsajn monerojn kiuj pesis ne 10 g sed 9 g. Kiamaniere la reĝa oficisto helpe de ununura pesado per balancilo je du brakoj eltrovu kiuj el vasaloj trompis?



Solvo

Ni prenu unu moneron el la sako de la unua vasalo, du moneroj el la sako de dua vasalo, tri moneroj el la sako de la tria vasalo kaj tiel plu, do entute

$$1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{1}{2} * 30 * 31 = 465 \text{ moneroj}$$

Tiuj normale pesus entute 4650 g, sed fakte ili pesas malpli, ekz. 4640 g, kio sugestas ke estas 10 moneroj liveritaj de la deka vasalo, alportinta falsajn monerojn.

- **Alia versio:**

Je mia dispono estas 100 kartoĉoj dividite en dek stakoj po dek kartoĉoj ĉiu. Normala kartoĉo havas mason je 10 g dum falsa kartoĉo naŭ gramoj. Unu el la kartoĉaj stakoj estas falsa. Kiamaniere, helpe de ununura pesado per balancilo kun du brakoj, ni distingu kiu stako konsistas el falsaj kartoĉoj?



Solvo:

Ni prenu unu kartoĉon el la unua stako, du el la dua, tri el la tria kaj tiel plu. Entute estiĝos $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ kartoĉoj. Ni metu ilin sur unu brako de la pesilo. Normale ili pesus 550 g. Sed ne rezultiĝas tiel sed iom malpli ekz. 547 g. Tio signifas ke la tria stako (550 - 547) konsistas el falsaj kartoĉoj. .



- **Falsa monero**

Je mia dispono estas 80 moneroj el kiuj nur unu estas falsa, plue iom malpli peza ol la ceteroj. Helpe de kiom da pesadoj, minimume, ni povus distingi la falsan moneron per pesilo kun du brakoj?

Solvo:

Ankaŭ ĉi problemoj estis tre popularaj dum Mezepko. Kompreneble, tiam oni postulis ke helpe de minimuma nombro de pesadoj oni difinu la pezon de la varo. La problemo menciita solviĝas ankaŭ tiel:

Ni apartigu 27 monerojn kaj metu ilin sur unuan brakon de la pesilo dum aliaj 27 moneroj sur la duan brakon. Se en ambaŭ brakoj rezultiĝos la sama maso, ni prenu 9 moneroj el la restintaj 27 kaj metu iln sur unuan brakon kaj 9 aliajn monerojn sur la duan brakon. Se denove rezultiĝas egalaĵo, ni prenu 3 monerojn el la nova resto el 8 moneroj kaj metu ilin sur unuan brako, dum 3 aliajn sur la duan brakon de la pesilo. Se rezultiĝas denove egalaĵo, ni metu po unu laste restinta monero sur ambaŭ brakojn de la pesilo kaj certe ni distingos la malpli pezan moneron. Do, sufiĉas kvar pesadoj.

Se dekomence unu brako rezultiĝas malpli peza, tiam ni dividu el tiu kvanto 9 monerojn kaj metu ilin sur unuan brako, dum 9 aliajn sur la duan brakon. Simile ni daŭrigos la rezonadon. Kiel ajn, sufiĉos kvar pesadoj. Provu mem kaj rimarkos ke ĉiu alia metodo postulus pli ol kvar pesadoj.



La problemo povus ĝeneraliĝi por iu ajn nombro de moneroj n tia ke $3^{k-1} < n < 3^k$.

Ĉi kaze helpe de k pesadoj, minimume, ni povos difini la malpli pezan moneron.

- **9 ringoj**

Je nia dispono estas naŭ ringoj kiu apenaŭ sin distingas je formo kaj aspekto. Sed unu el ili estas malpli peza. Helpe de unu pesilo kun du brakoj, kiom da pesadoj bezonatas por ke ni dedektu kiu el ili estas malpli peza?



Solvo

Ni dividu ilin en grupoj po tri ringoj. Helpe de tri pesadoj ni povas dedekti la malpli pezan ringon.

- **Moneroj**

Je nia dispono estas 8 moneoj kiuj aspektas tutsimlaj je ekstere, sed fakte unu estas ja falsa. Ni ne scias kiu estas ĝuste falsa monero sed nur ni scias ke ĝi estas malpli peza, sufiĉe malpli peza. Kiamaniere ni povus helpe de du pesadoj trovi sekure kiu estas la falsa monero?



Solvo

Ni dividu ilin en grupoj po 3, 3 kaj 2 moneroj. Ni metu du unuajn grupojn sur ambaŭ brakojn de la pesilo. Se okazos ke unu grupo malpli pezas, ni prenu po unu monero el ili kaj metu sur ambaŭ brakojn. Se denove rezultiĝos egalaĵo, la falsa monero estas la tria. Se ambaŭ unuaj grupoj havos saman pezon, ni prenu po unu monero el la tria grupo kaj metu ilin en ambaŭ brakojn. Do sufiĉas du pesadoj.

- **Unu el 12 moneroj estas falsa**

Inter 12 moneroj estas sciite ke unu estas ja falsa. Ĝi malsamas je pezo de la ceteraj, sed ne estas sciite ĉu pli aŭ malpli. Ĉiuj normalaj moneroj

sampezas. Oni postulas distingi la falsan moneron helpe de kvar pesadoj per pesilo kun du brakoj sen pesilŝtonoj. Samtempe oni trovu ĉu la falsa monero estas malpli peza aŭ pli peza ol la normalaj moneroj.



Solvo

Dum unua pesado ni surmetu po kvar moneroj en ambaŭ flankojn. Se ne konstateblas egalaĵo, unu el kvaropo anstataŭiĝas per la tria kvaropo de moneroj. . Nun certe konstateblos en kiu kvaropo troviĝas la falsa monero. Des pli oni konstateblos ankaŭ ĉu ĝi estas pli aŭ malpli peza ol la normalaj moneroj. Dum la tria pesado ni surmetu po du moneroj en ambaŭ flankojn. Tiel ni povas difini en kiu duopo el ili troviĝas la falsa monero. Dum la kvara pesado ni difinos certe la falsan moneron.

Matematikaj paradoksoj

Ĝenerale la paradoksoj estas malakcepteblaj konkludoj derivantaj de rezonadoj deekstere aspektantaj logikaj. Ili ludas gravan rolon en matematiko ĉar ili vekas interesiĝon kaj antaŭenigas la pensadon.

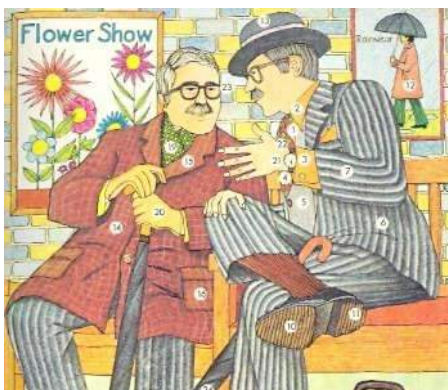
Ĉi tie inkluziviĝas problemoj rilatantaj al la respektado aŭ malrespektado de la logikaj kaj matematikaj leĝoj.

Tre famaj estas la paradoksoj malkovritaj surkampe de la *Teorio de Aroj*, de infinito, de serioj sed ankaŭ en aliaj kampoj.

Ni komencu per kelkaj simplaj formoj:

Mensoguloj

Ĵan kaj Pjer mensogas tutan tempon. Ĵan diras al Pjer: Kiam mi ne mensogas, ankaŭ ci ne mensogas. Pjer respondas: Kiam mensogas mi ankaŭ ci mensogas.



Ĉu eblas ke dum ĉi tiu konversacio unu mensogas dum la alia ne?

Solvo:

Ni notu per J la aserton “Ĵan mensogas” kaj P la aserton “Pjer mensogas”. Ĵan diris al Pjer “se J ne estas vera tiam ankaŭ P ne estas vera”, Pjer respondis “Se plenumiĝas P, tiam plenumiĝas ankaŭ J”. Do ĉi asertoj notas ke apenaŭ eblas plenumiĝi samtempe P kaj J. Tio estas, ilia senco identas. Tial ambaŭ Ĵan kaj Pjer estas dirintaj la veron aŭ ambaŭ estas mensogintaj, alia ebleco ne ekzistas. (ĉi tiu estas tre trafa ekzemplo pri la pruvigo per metodo de la kontraŭo)

- **Paradokso de Ĵurden**

(P. E. D. Jourdain, angla matematikisto, jaro 1913):



P. E. D. Jourdain (1879 - 1919)

Ni prikonsideru poŝtkarton kie sur la antaŭa flanko estas skribite: “La aserto malantaŭ ĉi poŝtkarto estas vera, dum sur la malantaŭa flanko estas skribite “La aserto troviĝanta malantaŭ ĉi poŝtkarto estas falsa”

Ni demandu: kiu aserto estas vera?

Solvo:

La paradokseco konsistas en tio ke se ni konsideru vera la unuan aserton, tiam rezultiĝas vera ankaŭ la dua aserto (ĉar la unua aserto diras ke la “dua aserto veras”). Sekve, la unua aserto malveras (ĉar la dua aserto diras tion). Do, se ni konsideras vera la unuan aserton ĝi rezultiĝas malvera. Dum, se ni konsideras malvera la unuan aserton, rezultiĝas malvera ankaŭ la dua, kio rezultiĝas imediate ke la unua aserto estas vera. Do, la unua aserto estas vera nur se ĝi malveras, kio estas maleble.

Paradokso de krokodilo

Iufoje, kota krokodilo en la rivero Nilo forkaptis infanon. La ties patrino petegis la krokodilon redoni sian infanon. La krokodilo kiu ne nur scipovis paroli sed ankaŭ filozofiumi. . . diris al ŝi: Se vi divenus kion mi ja intencas fari kun via infano mi redonos ĝin al vi, kontraŭe mi formanĝos ĝin. Kiel devus agi la povra patrino?

Solvo

Ŝi povus alparoli al la krokodilo: Vi formanĝos mian infanon!
Se envere la krokodilo agus tiel, ĝi kompreneble devus redoni la infanon al la patrino. Se ĝi envere ne intencus formanĝi ĝin, devus ja formanĝi ĝin. . Sekve, la kondiĉo ne funkciius. . .

Paradokso de Chrysippos¹⁷

Iu Kretano iris al Grekio kaj aldiris la virojn sur la marbordo: ĉiuj Kretanoj estas mensoguloj!

Ĉu li mensogis ĉi kaze?

Aliffoje li iris denove al Grekio kaj aldiris la virojn: ĉiuj Kretanoj mensogas kaj tio validas ankaŭ por mi!

La grekoj ege miris kaj ne povis kompreni ĉu la aserto de Kretano veras aŭ malveras? Kial do?

Respondo

¹⁷ Oni diras ke la poeto kaj kritikisto Philetus klopodis solvi ĉi paradokson, sed mortis pro cxagreno ke ne sukcesis fari tion

La aserto de iu Kretano ke “ĉiuj Kretanoj mensogas” validas ankaŭ por li mem. Do, tio eldirita de li malveras, t. e. ke ne ĉiuj Kretanoj mensogas, do ankaŭ lia aserto malveras, . . .

Paradokso de Ebulido aŭ de Epimenido

Se mi diras: Mi ĉiam mensogas! - kia estas tio, vera aŭ malvera?

Respondo

Se tio malveras tio signifas ke “mi ne ĉiam mensogas”, do mia aserto malveras, do ĝi estas mensogo. . . , se tio veras, tio signifas ke ankaŭ ĉi kaze mi mensogis, do “mi ne ĉiam mensogas”.

Paradokso de Russell



Bertrand Russell (1872 - 1970)

En la jaro 1911 Bertrand Russell malkovris paradokson portanta lian nomon. Paradokso naskiĝis ene de la “naiva teorio”¹⁸ de aroj konsiderinta la aron de ĉiuj aroj kiuj ne estas parto de si mem. Tia aro rezultiĝas parto de si mem, do enestas paradokso.

Jen formuliĝo iel pli matematikeca:

La aro M estas la aro de ĉiuj aroj kiuj ne entenas sin kiel elementon. Ĉu M enhavas sin mem?

Se ĝi entenas sin, tiam ĝi ne estas elemento de M , laŭ difino.

Se ĝi ne entenas sin, tiam ĝi estas ja elemeto de M , denove laŭ difino.

¹⁸ Tiel ĝi nomiĝis de Georg Cantor kaj Gottlob Frege.

Tial la aserto “M estas elemento de M” kaj la aserto “M ne estas elemento de M”, ambaŭ kondukas nin al kontraŭdiraĵo.

Ekzistas kelkaj versioj de la paradokso de Russell, ekzemple : “ A estas elemeno de M, se kaj nur se A ne estas elemento de A”.

$$M = \{A \mid A \notin A\}$$

Pli konkrete:

En la naiva teorio de aroj, oni komprenas la aron kiel kolekcio de objektoj kontentigantaj iun kondiĉon. Iu ajn evidenta propozicio esprimanta iun econ povas servi kiel difinon de la aro. Jen kelkaj aroj:

- La aro de ĉiuj ruĝaj motorcikloj.
- La aro de ĉiuj entjeroj pli ol nulo.
- La aro de ĉiuj bananoj blukoloraj - kio fakte estas malplena aro. .



•
Ĉi tiu aro ne estas elemento de si mem.

Kelkaj aroj ne estas elementoj de si mem - ekz. la aro de ĉiuj ruĝaj motorcikloj - kaj kelkaj estas - ekz. la aro de ĉiuj nemotorcikloj. Nun, kion ni dirus pri ĉiuj aroj kiuj ne estas elemento de si mem? Ĉu ĝi estas elemento de si mem, aŭ ne? Se ĝi estus, rezultiĝus ke ĝi ne estus, se estus rezultiĝus ke estas. .

Malkovrite, ĉi paradokso, evidentiĝis ke oni ne povas operacii kun la aroj sen falante en kontraŭdiraĵon, tial la naiva teorio de la aroj devus anstataŭiĝi

per alia teorio, kie ne povus naskiĝi paradoksoj. Tiel aperies du proponoj: teorio de tipoj kaj aksiomateca teorio de aroj¹⁹. .

Ĉi sube estas kelkaj ekzemploj pli kompreneblaj de ĉi speco de paradokso.

Paradokso de la barbiro

En urbeto oni elektis kiel barbiron homon kiu razas ĉiujn virojn kiuj ne povas razi sin mem. Ni demandas. Ĉu tiu barbiro razas sin mem?

Solvo: Se la barbiro razas sin mem, nia regulo malrespektiĝas, ĉar la barbiro estas razante viron kiu razas sin mem. Se la barbiro ne razas sin mem, denove la regulo malrespektiĝas ĉar tiel li ne razas viron kiu ne razas sin mem.

(Nature, tia barbiro povas ekzisti sed li ne povas respekti la regulon menciitan. .)



Kion devas fari la barbiro? Nenion! Logike tia barbiro ne povas ekzisti!

Alia versio de ĉi tio

- **La barbiro kaj la urbodomo**

La urbodomo dungis barbiron kondiĉe ke li razu ĉiujn virojn kiuj ne volas aŭ ne povas razi sin mem. Li devas deponi monsumon, kiun oni konfiskigos se li agas kontraŭ tiu kondiĉo. Post kelkaj tagoj, la urbestro alvenis al la

¹⁹ Teorio de tipoj estis proponita de Cantor kaj Whitehead dum la aksiomateca teorio de Ernst Zermelo.

razejo kaj diris al la barbiro: Oni konstatis ke vi persone razas vin, do vi neglektis nian kondiĉon. Tial la monsumo transpasos al la urbodoma kaso! Neniel - respondis la barbiro. Ekde nun, mi rifuzas razi min mem. Do mi apartenos al tiuj viroj kiuj ne volas razi sin mem. Sed mi rajtas ja razi ĉi virojn laŭ la interkonsento. Do, mi rajtas razi min mem, tial la monsumo restos ĉe mi.



Kiu rajtas? Kiel tion traktus iu juĝisto?

Solvo

Neniu nuntempa juĝisto kondamnas la barbiron, ĉar la interkonsento en sia esenco esprimis ja la rilatojn de la barbiro kun la ceteraj urbanoj kaj ne kun si mem.



Juna Russell

- **Paradokso de Zenono**

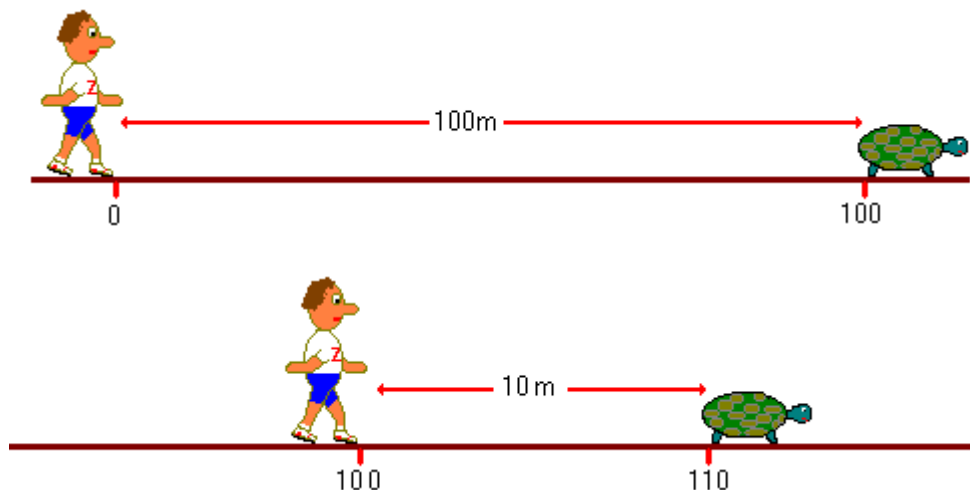
Akilo kaj la testudo

La testudo troviĝas je 100 m antaŭ la kuranto. Tuj post la startiĝo ambaŭ kurantoj ekkuras je sama direkto. Ĉu Akilo atingos la testudon?



Zenono (ĉikaŭ la jaro 400 antaŭ Kristo)

Simpla rezonado diras : Jes! Dum sofisto (antikva pensulo) dirus: Ne! Ni supozu ke Akilo kuras je rapideco dekoble de tiu de la testudo. Do kiam li trairas cent metrojn, la testudo trairas dek metrojn. Kiam li trairos ankaŭ pliajn dek metrojn, la testudo trairos unu plian metron, kiam Akilo trairos ankaŭ tiun metron, la testudo trairos pliajn dek centimetrojn kaj tiel plu.



Alivorte, la distanco inter ambaŭ kurantoj malgrandiĝas ĉiam pli senfine, sed neniam ĝi nuliĝas! - Aŭ ne? Kion dirus vi?



Simila al tiu ĉi problemo estas ankaŭ la jena:

- **Paradokso de la pendumito**



Filma sceno jaro 1943

Oni kondamnis kelkiun al morto per pendumilo. Dimanĉon, la juĝisto kiu estis sincera, diris al la kondamnito: “Oni pendumos vin en unu el la semajntagoj sekvontaj!

Sed vi ekscios la tagon nur frumatene de tiu tago.”

La jugxisto foriris dum la pendumoto en sia soleco ekrezonadis:

Certe oni ne pendumos min la venontan dimanĉon, kontraŭe mi ekscius tion ekde la sabatan vesperon, ne atendente la dimanĉan frumatenon. . Samtiel, oni ne povus pendumi min sabate ĉar tion mi ekscius ekde la vendredan vesperon. . Simile rezultiĝas ke oni ne povus ekzekuti min en unu alian tagon de la venonta semajno. Verŝajne, la juĝisto estas dirinta frazon laŭ kiu mi ne povas pendumiĝi. .

Sed, frumatene marde, oni anoncis la kondamniton ke ties ekzekuto okazos tiun tagon. La kondamnito ne ekspektis tion sed la ekzekutistoj forkondukis lin al la ekzekutejo, ĉar ankaŭ la kondiĉo de la juĝisto respektiĝis!

- **La pomujo de la reĝo**

Iu reĝo ege ŝatis sian pomujon. Pro tio, li ordonis ke oni mortigu ĉiun ŝteliston kaptita en sia pomujo. Sed la formo de la ekzekuto laŭ li estu duspeca: senkapiĝo se la ŝtelisto estis mensogulo kaj veneniĝo se li estis sincerulo.

Iu saĝa ŝtelisto kaptita dum ŝtelado en la pomujo deklaris al la reĝaj konsilistoj: Vi senkapiĝos min!



Analizinte la respondon, la konsilistoj apenaŭ scipovis kiel ekzekuti la ŝteliston, ĉar: se li estas dirinta veron ili ne devis senkapiĝi lin, kontraŭe ili devis senkapiĝi lin!. . Sciiginte pri tiu komplika situacio, la reĝo ordonis ke oni liberigu la inteligentan ŝteliston.

- **La insulo de kanibaloj**

Kiun ajn surbordiĝanta en la insulon de kanibaloj ĉi lastaj murdis kaj formanĝis, sed tion ili faris dumaniere: se la “gasto” estis sincerulo oni murdis lin en la “Preĝejo de la Justa Dio”, kontraŭe, oni murdis lin en la “Preĝejo de la Maljusta Dio”. Iutage surbordiĝis saĝulo kiu tuj deklaris al la sovaĝuloj: Vi murdos min en la “Preĝejo de la Maljusta Dio”.

Analizinte lian deklaron la tribestroj ne scipovis kiel agi kun la “deliktulo” kaj sekve liberigis lin. (ĉar se li estis dirinta veron ili devus ekzekuti lin en la “Preĝejon de la Justa Dio”, kontraŭe ili devus ekzekuti lin en la “Preĝejon de la Maljusta Dio”).



- **Elektra seĝo**



Por “ŝpari” la eksterordinare inteligentajn krimulojn la gubernatoro de iu usona ŝtato ofertis ilin la jenan opcion: elektu inter du seĝoj el kiuj unu estis fakte vivdanĝera, dum la alia ne. Tiucele, li rajtis demandi la ekzekutiston mem, kiu siaflanke unu tage eldiris la veron, la alian tagon mensogis. Kia devus esti la ununura demando de la kondamnito al la ekzekutisto por ke li divenu kiu estas ja la nedanĝera seĝo?

Respondo: se mi demandus vin hieraŭ kiu seĝo estas danĝera, kiel vi respondus min?

Envere, ni supozu ke tiutage la ekzekutisto diras la veron. Sed unu tage antaŭe li dirus malveron, tial li montrus al la kondamnito la danĝeran seĝon. Se tiutage la ekzekutisto diras malveron, certe li eldirus la kontraŭon

de tio kion li dirus hieraŭ, do denove la danĝeran seĝon. Sekve la kondamnito devas elekti la alian seĝon. .

Tutsimila estas ankaŭ la jena problemo:

- **La ĝemelulinoj**



Sur vojkruciĝo estas du vojdirektoj, unu kondukanta al la urbo A, la alia al la urbo B. Tie sidas du etaj ĝemelulinoj, el kiuj unu ĉiam diras la veron, dum la alia malveron.

Cetere por ĉiu demando ili postulas 100 \$! Tial interesato devas kompili laŭeble ununuran demandon por ekscii la ĝustan direkton. Kia devus esti tia demando?

Respondo:

La demando povus esti kiel jene: “Se mi demandus vian fratinon kiu vojo kondukas min al la urbo A, kiel respondus ŝi?”

Aŭ

- **La turisto²⁰.**

En la urbo A la homoj diras ĉiam la veron dum en la urbo B oni diras ĉiam malveron. Ambaŭurbaj civitanoj vizitas regule unu la alian por komerco ktp. Plue ilia ekstera aspekto tutsimilas. Fremda turisto surteriĝas en unu el la

²⁰ Simila problemo estas pritraktita en la komenco

urboj ne sciante kiu urbo estas A aŭ B. Cetere li rajtas demandi la lokanojn nur unufoje. Kian demandon devas fari li?



Solvo:

La demando povus esti: Ĉu vi estas el tiu ĉi urbo?

Se li aŭdas la respondon “Jes” temas pri la urbo A. Envere, se la demandito estas urbano de A, li diros “Jes” ĉar estas sincerulo. Se la demandito estas el la urbo B, vizitanta la urbon A, li diros denove “Jes” ĉar li mensogas. Kontraŭe, se temas pri la urbo B, ambaŭ civitanoj demanditaj respondus “Ne”.

- **Paradokso de Aristoklo**

Imagu diskon je radio OA . Inter O kaj A notu punkton C . Do $OC < OA$. Dum la disko ruliĝas laŭ rekto OA ĝi akiras denove la pozicion OB vertikale al la vojo. Tiam la trairsta vojo de A al C devas esti la sama rilate la vojon. Konforme la la formulo pri cirkonferenco de la cirklo, la vojo estas $2\pi \cdot OA$ kaj $2\pi \cdot OC$, kio malprobable veras!



Aristoklo (384 - 322 antaŭ Kristo)



- **La advokato**²¹

Riĉulo petis konatan advokaton instrui al sia filo la juran majstrecon. Li interkonsentis kun la advokato antaŭpagi la duonon de la monsumo, dum la ceteron pagi nur postkiam sia filo gajnus la unuan juĝproceson. Tio estus cetere ia garantiilo ke la edukado estus sukcesa. La advokato, konsciiĝante pri sia kapableco, akceptis la kondiĉon. Tiel, la juna studento sekvis la tutan kurson kaj fine diplomiĝis kiel advokato. Sed tiumomente li decidis ne ekzerci la profesion de advokato.



²¹ Ĉi paradokso konatas kiel paradokso de Protagoro (490 - 420 antaŭ Kristo), antikva sofisto kies studento estis Euthleus.

Kiam la instruisto postulis la duan duonon de la monsumo pagenda, la juna advokato respondis: mi studadis nur pro mia plezuro, mi ne plu volas ekzerci la profesion de advokato. Mi pagus vin se mi ekzercus la advokatecon kaj gajnus la unuan proceson, ĉu ne?

- Tiam mi akuzos vin ĉe la juĝejo!

- Bone, faru tion. Se vi gajnus la proceson tiam vi ne rajtas ricevi la reston de la monsumo pagenda, se tion gajnus mi, denove vi ne ricevos ion. .

- Ne, diris la fama advokato, se gajnus vi, mi ricevus la monsumon, se gajnus mi la juĝejo devigus vin pagi al mi!

Diru kara leganto, kiu rajtas el du?

Paradokso de Hilberto



David Hilbert

La hotelo plenplenas, tamen alvenas novaj gastoj.

La hotelo plenplenas, alvenas senfine novaj gastoj

Noto: La hotelo de Hilberto supozeble disponas je senfina nombro de ĉambroj kaj senfine da gastoj. Ĉiuj ĉambroj estas okupitaj. Alvenas nova vizitanto. Ĉu oni povas akomodigi lin?

Jes, la aritmetiko de senfinaj grandoj permesos tion.

Je unua vido tio aspektas nebla, sed la hotelestro translokas la gaston ĉe la ĉambro nr. 1 al la ĉambro nr. 2; kaj la gaston ĉe la ĉambro nr. 2 al la ĉambro nr. 3 kaj tiel plu. La gastoj ĉe la ĉambro nr. n translokiĝas ĉe la ĉambro nr. $(n + 1)$. Do, se la hotelo plenplenas, ĉiam oni povas akomodigi ankaŭ novan plian gaston Ĉar la ĉambro nr. 1 restas libera por la nova gastoj.

Se alvenas alia gastoj, oni agas kun li similmaniere.

Je la dua kazo, se alvenas senfine da novaj gastoj, ĉu oni povas akomodigi ilin?

Jes, ankaŭ ilin oni povas akomodigi danke al la eco

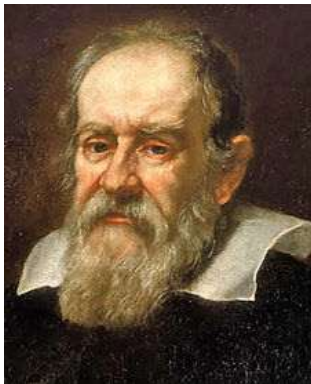
$$\infty + \infty = \infty.$$

Ekz. la hotelestro petas ĉiun gaston noti la nombron de la ĉambro kie li troviĝas aktuale kaj translokiĝu al la ĉambro je numero duoblo de la numero aktuala. Post kiam ĉiu agas tiamaniere, plurestos okupitaj nur la ĉambroj je para nombro, dum tiuj je nepara nombro restos liberaj.

Tiel la hotelo de Hilberto estas envere plenplena, sed ĉe ĝi liberiĝas senfina nombro de ĉambroj, ĝuste tiuj portantaj neparan nombron.

Paradokso de Galileo

En sia verkaĵo “Novaj sciencoj” la fama itala sciencisto estas skribinta pri la kontraŭeco de kompletaj kvadratoj.



Galileo Galilei (1564 - 1642)

Ni esploru la naturaj nombrojn **1, 2, 3, 4, 5**

Ties kvadratoj estas **1, 4, 9, 16, 25 ...**

Kelkaj entjeroj estas same kvadratoj, kelkaj aliaj ne, do la serio de pozitivaj entjeroj, inkluzive la kompletajn kvadratojn, devus esti pli granda ol tiu de kvadratoj mem. Sed por ĉiu kvadrato ekzistas ja pozitiva entjero kaj por ĉiu entjero ekzistas kvadrato, sekve ambaŭ aroj entenas saman nombron da elementoj, ambaŭ aroj estas egalvaloraj. . (korespondo unu al unu)

Galileo ne sukcesis solvi la kontraŭecon kaj konkludis ke la ideoj “malpli”, “egala” aŭ “pli” ne havas sencon por la senfinaj aroj.

En XIX jarcento Georg Cantor, uzante la saman metodon montris ke la ideoj “malpli”, “egala” kaj “pli” aplikeblas ankaŭ por la senfinaj aroj.

En la finiaj aroj, la paro estas ĉiam malpli ol la tuto. Sed en la senfinaj aroj ĝi povas esti egala al la tuto. Ofte tio aspektas kiel paradokso, sed el matematika vidpunkto ne ekzistas paradokso.

La sorĉisto kaj la feino



La paradokso de la riĉa sorĉisto kaj la akva feino kondukas same al la koncepto pri senfino (infinito). Tio povas konsiderata kiel ekzemplo de $\infty - \infty$ kio estas nedifinita operacio. Do, ni povas akiri de ĝi diversajn rezultatojn.

Historio: riĉa sorĉisto havis akvan feinon en la baseno de lia ĝardeno. Li emis ludi kun ŝi per oraj moneroj. Ĉiun minuton li ĵetis en akvon du monerojn dum ŝi siaflanke redonis al li unu moneron post duonminuto.

*Se la ludo daŭras senfine, kiel oni devas disdoni la kvanton de la moneroj?
(La monerojn oni povas noti per la numeroj 1, 2, 3, 4, ktp.)*

Solvo I

La sorĉisto donas al la feino monerojn je numeroj 1 kaj 2, dum ŝi redonas la moneron je numero 1. Li donas al ŝi moneroj je numero 3 kaj 4 kaj ŝi

redonas la moneron je numero 2, li donas la monerojn je numero 5 kaj 6 kaj ŝi redonas la monerojn je numero 3. Kaj tiel plu.

Konkludo: ĉe la sorĉisto eventuale revenas ĉiu monero, do li ekhavas tuton dum la feino nenion.

Solvo II

La sorĉisto donas al la feino la monerojn je numeroj 1 kaj 2, dum ŝi redonas la moneron je numero 2, retenante la moneron je numero 1; li donas al ŝi la monerojn je numeroj 2 kaj 3 dum ŝi redonas la moneron je numero 3, retenante la moneron je numero 2; Li donas al ŝi la monerojn je numeroj 3 kaj 4 kaj ŝi redonas la moneron je numero 4 retenante la moneron je numero 3. Kaj tiel plu.

Konkludo: Fine la feino ricevos ĉiujn monerojn dum la sorĉisto ricevos nenion.

Solvo III

La sorĉisto donas al la feino la monerojn je numeroj 1 kaj 2, ŝi redonas al li la moneron je numero 2 retenante la moneron je numero 1. Poste li donas al ŝi la monerojn je numeroj 3 kaj 4 kaj ŝi redonas la moneron je numero 4 retenante la moneron je numero 3. Kaj tiel plu.

Konkludo: Finfine ĉiujn monerojn je nepara numero retenas la feino dum tiujn je para numero ricevos la sorĉisto, do ambaŭ posedos egalan kvanton da ili.

Problemoj kun dedektivoj

- **Bankoŝtelisto**

Oni forŝtelis bankon en Sitidaun strit. Tuj ekenketis la fama dedektivo Sherlock Holms²². Li notis ĉiujn kvar respondojn de la akuzitoj, bankaj oficistoj.

Timido: *Mi scias nenion, ĉar mi eliris la unua el la banko*

Anfee: *El ni kvar mi ne eliris la lasta.*

Koksford: *Kiam mi ekrevenis hejmen mi estis nek unua, nek la lasta.*

Smith: *Mi forlasis la bankon lasta.*

Poste Sherlock Holms esploradis la lokon kaj ĉiujn padojn kondukantaj al la bankejo, same li pretigis kelkajn skizojn pri ties internaj partoj. Li rezonadis:

La gangsteroj certe havis informanton ene de la banko. La informanto eliris la unua el la banko.



Sherlock Holmes (portreto de la jaro 1891)

- Ĉu tiu estas Timido?
- Ne hastu, demandu la pordiston laŭ kiu vico eliris ĉiuj kvar oficistoj el la banko.
- La pordisto rakontis pri la ĝusta vico, kiu fakte malmulte diferencis de la asertoj de oficistoj mem.
- El ĉiu kvar nur unu estis mensoginta.
- Do la informanto estas Anfee?

²² Sherlock Holmes estas fikтива personagxo de la romano de Arthur Doyle, fizikisto, aperinta en la jaro 1887

Kiamaniere Sherlock Holes konkludis tiel, eĉ sen aŭdinte la vortojn de la pordisto ĝisfine?

Solvo:

- El ĉiuj kvar asertoj unu estas malĝusta, dum la aliaj ĝustaj. Kiu do estas malĝusta? Tio ne povas esti la aserto de Smith, ĉar alie rezultiĝus ĝustaj tri aliaj, tiam nur Smith elirus la lasta el la banko (sed li mensogas)
- Se mensogas Koksford, tiam li estis aŭ la unua aŭ la lasta, sed Timido diras ke li estis la unua, dum Smith diris ke li estis la lasta.
- Se Timido kaj Smith ambaŭ diras la veron, tio signifas ke Koksfordo ne povus esti la unua, nek la lasta, do lia aserto rezultiĝas ĝusta.
- Ne mensogis ankaŭ Anfee, se Smith diris la veron, do li estis la lasta kaj Anfee diris la veron asertante ke li ne estis la lasta. Do restas ke Timido mensogis, kio koincidas kun la vereco de la aliaj tri asertoj. Kiel sciite, Timido diris ke li eliris la unua. Tio ne koincidas al la ceteraj tri asertoj, nur enkaze se el tiuj sekvus ke neniu oficisto povus esti la unua. (tiam ĝuste Timido estus la unua). Se estus tiel, la unua ne povus esti Smith, nek Koksford (laŭ sia aserto mem). Anfee diris ke li ne estis la lasta. Tiam al la vereco de lia aserto koincidas nur tio ke li estis la unua.
- Do Timido estas mensoginta, restas nur unu ebleco: la unua eliris Anfee. Sed Timido iel timiĝis, pro tio li mensogis. Ne necesas demandi lin, ĉar li scias nenion, li estas elirinta, eble ne troviĝis eĉ tie.

• **Problemo de Levis Kerroll**²³



Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson) 1832 - 1898

La aŭtoro de la libro “Elizo en la Mirlando” ŝatis starigi ĉi problemon el kvar propozicioj:

²³ Kvazaŭnomo, kromnomo de Charles Lutwidge Dodgson, matematikisto kaj verkisto

El du, nur unu veras: aŭ la maliculo penetrigis en la ekipaĝon au la atestanto mensogas.

(1) Se la maliculo havas informanton, tiam li estas penetrinta en ekipaĝon.

(2) La maliculo ne havas informanton, nek ŝlosilon

(3) Aŭ havas informanton kaj ŝlosilon.

(4) La maliculo havas ŝlosilon.

Kio rezultiĝas el tio?

Solvo:

Ni komencu el la lasta aserto. Tiel, la maliculo havas ŝlosilon (aserto 4). Sekve li havas ankaŭ kunlaboranton (aserto 3). De ĉi tie rezultiĝas ke li estas penetrinta en ekipaĝon (aserto 2) kaj finfine la atestanto ne eraris (aserto 1).

Problemoj je praktika karaktero

Ĉi tie inkluziviĝas problemoj kies solvo estas simple praktika

Paro da ŝtrumpoj

En kesto estas 6 paroj da verdaj ŝtrumpoj, 5 paroj da ruĝaj ŝtrumpoj, 4 paroj da nigraj ŝtrumpoj. Kiom da unuopaj ŝtrumpoj ni devas eltiri hazarde por ke ni akiru normalan ŝtrumpan paron.



Respondo:

4 unuopaj ŝtrumpoj, ĉar 2 el ili certe havos saman koloron. .

Alia versio

En ŝranko de malluma ĉambro estas multaj blankaj kaj nigraj ŝtrumpoj, same grandaj kaj je sama materialo. Kiom da ŝtrumpoj ni devas eltiri, minimume, por ke ni estu certa ke ni prenis almenaŭ unu normalan paron.

Respondo:

minimume 3

Noto: unu paro da ŝtrumpoj kompreneblas kiel paro da samkoloraj ŝtrumpoj.

Divido de la pano

Dividu sep panojn por ok personoj egalmaniere kaj per minimume da tranĉoj, t. e. maksimuma ŝparado.

**Solvo:**

Tiaj problemoj estis tre popularaj en antikveco. Kompreneble, gravas ke dum la tranĉado ni produktu kiom eble malpli paneroj. Por solvi ĉi praktikan taskon nin helpas la operacioj kun frakcioj. Tiel ni povas skribi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Ĉi egalaĵo sugestas nin ke kvar panojn ni dividu po duone, du panoj po kvarone kaj unu panon po okone. Kompreneble egalmaniere. Tiel formiĝas samgrandaj porcioj por ok personoj helpe de entute nur $4 + 3 + 7 = 14$ tranĉoj. Ĉiu alia maniero postulus pli da tranĉoj. Provu se vi volas!

Solucio

Solucio je koncentriĝo 12 % devas maldikiĝi ĝis 10%. Kiom da akvo devas aldoni en ĝin?



Solvo:

Ni notu per m la mason de la solucio kaj x tiun de la akvo aldonenda. Tiam formiĝas la ekvacio

$$0.10 \cdot (m + x) = 0.12 \cdot m$$

$$\text{Aŭ } 0.10m + 0.10x = 0.12m$$

$$0.12m - 0.10m = 0.10x$$

$$0.02m = 0.10x$$

De kie

$$x = 0.02m / 0.10 = 0.2m.$$

Do, aldonendas akvo je kvinono de la aktuala maso de la solucio.

La kapro

Kamparano estis liginta sian kapron en la centro de herbejo je cirkla formo kun radio 10 m. Kiom metroj devas la kamparano plilongigi la ŝnuron ĉiun el la tri sinsekvaj tagoj por ke la kapro manĝu egalan kvanton da herbaĵo.



Solvo:

Kompreneble, la herbaj surfacoj paŝtendaj de la kapro havas formon de cirklaĵoj (koronoj). Ni notu iliajn radiojn per r kaj r' . Tiam, por ke ili estu egalaj devas plenumi la kondiĉo:

$$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (r'^2 - r^2)$$

De kie

$$r' = r\sqrt{2}$$

Similmaniere rezultiĝas

$$r'' = r\sqrt{3}$$

kaj ĝenerale

$$r_n = r \sqrt{n+1}$$

Do, la ŝnuro devas havi respektive longojn r , r' , r'' ktp. kiel supre.

- **Kiu ujo havas plej grandan mason?**

Je nia dispono estas du ujoj je sama dikeco sed je kapacitoj 8 litroj kaj 1 litro. Kioma estas la raporto de iliaj masoj?



Solvo:

La maso de la ujoj dependas ne de volumeno sed de la surfaco. Estas sciite ke la volumeno pligrandiĝas kune kun la kubo de la linearaj dimensioj dum la surfaco kune kun la kvadrato de linearaj dimensioj. Tiel, la maso de la pli granda ujo estos kvaroble de tiu malgranda (aŭ kiom la kvadrato de la kuba radiko de la kapacito de la ujo)

Kial estas profitdona aĉeti grandajn terpomojn

Ni supozu ke en la merkato estas du specoj de terpomoj, unu je diametro 6 cm kaj alia je diametro 10 cm. La unuaj kostas 40 L/kg dum la duaj 60 L/kg. Kiel estus pli profitdona, aĉeti 6 kg po 40 L/kg aŭ 4 kg po 60 L/kg, t. e. elspezante en ambaŭ kazoj 240 Lekoj?



Respondo

Estas sciite ke la terpomoj unue devas senŝeliĝi. Sed la ŝelo rilatas al la surfacoj, dum la maso mem al ilia volumo. Geometrio instruas ke la surfaco pligrandiĝas proporcie al la kvadrato de diametro dum la volumo kun la kubo de la diametro. Tial en la dua kazo ni havus

$$(10/6)^2 = 2.8$$

fojoj pli da ŝelo kion ni forĵetus en la rubujon, aliflanke

$$(10/6)^3 = 4.6$$

fojoj pli da maso.

- **Kiu penas pli**

Kiu estas pli peza: glaso da pulvorizita sukero aŭ glaso de sukerpecoj?

Respondo

Ne hastu diri ke pli peza estus la glaso kun pulvorizita sukero, aŭ inverse.

Ni supozu ke la sukerpecoj estas centoble pezaj ol tiuj sukereroj. Tiam ni imagu ke ni pligrandiĝis ĝuste 100 fojojn la sukerpecojn kune kun la glaso mem. Tiam la volumeno de la glaso pligrandiĝas 10^6 fojojn, same la sukero. Normala glaso kun ĉi tiuj pligrandigitaj pecoj konsistigas unu miliononon de la giganta glaso. La tuta kvanto de sukero pezas kiom normala glaso da pulvorizita sukero. Do, en la glaso estas tiom da sukerpecoj kiom da pulvorizita sukero.



- **La kerno kaj la maso**

Ni supozu ke la diametro de la kerno de ĉerizo estas la triono de tiu de la ĉerizo mem. Kiomfoje pli granda estas la volumo de la maso de ĉerizo ol la volumo de la kerno?



Solvo

Estas sciite ke la raporto de la volumenoj egalas al la raporto de la linearaj dimensioj. Tiam la volumeno de la ĉerizo estos $3^3 = 27$ fojojn pli granda. La maso de la ĉerizo sekve estos 26 fojojn pli granda ol tiu de la kerno.

- **Modelo de la turo Ejfelo**

Kelkiu konstruis malpligrandigitan modelon de la turo Ejfelo de Parizo, kiu, kiel sciite, estas 300 m alta kaj havas mason 8 miloj da tunoj. Mem la modelo havas mason je 1 kg. Kioma estas ĝia alteco?



Solve

Ni notu per x la altecon de la modelo. Denove ni utiligu la scion pri la raporto de de volumenoj kaj linearaj dimensioj. La maso estas proporcia al la volumeno.



La kuba radiko de $8\,000\,000 / 1$ estas 200. Tiu ĉi estas ja la raporto de la linearaj dimensioj. Tiam $300 / x = 200$ de kie $x = 1.5$ m

- **Picoj**

Ni supozu ke kvadrata pico je eĝo 12 cm kostas 50 L dum alia pico kvadratforma je eĝo 15 cm kostas 60 L. Ĉu estas profitdone aĉeti 6 picoj de unua speco aŭ 5 picoj de la dua speco? (kiuj kostas entute egale = 300 L)



Respondo

La prezo koncernas ne la surfacon sed la volumon de la pico, nature. Tiel, la surfaco diferencas

$$(15/12)^2 = 1.56 \text{ fojojn}$$

Dum la volumeno

$$(15/12)^3 = 1.95 \text{ fojojn}$$

Kalkulante senpere

$$6 \cdot 12^2 \cdot h = 864 \text{ h (kie h estas la dikeco de la pico) dum en la dua kazo}$$

$$5 \cdot 15^2 \cdot h = 1225 \text{ h.}$$

La raporto de volumenoj

$$1225/864 = 1.38 \text{ dum en Lekoj 1}$$

- **La sapo**

Flutura²⁴, lavinte sep ĉemizojn, rimarkis ke la dimensioj de la sapo malpligrandiĝis ĉiuj po duone. Ŝi volis scii kiom da ĉemizoj povus plulavi per la restinta sapopeco. Ĉu vi povas helpi ŝin?



Respondo:

La dimensioj malpligrandiĝis ĉiuj po duone, tiam la volumeno malpligrandiĝis

$$2^3 = 8 \text{ fojojn.}$$

Kompreneble Flutura povas plulavi nur unu ĉemizon per la restinta sapopeco

Alia versio

- **La sapopeco**

²⁴ Ina nomo

Post lavo la sapo kuntiriĝis je sesono de larĝeco, longeco kaj dikeco. Por kiom da aliaj lavoj sufiĉus la restinta sapopeco?

Solvo

La restinta sapopeco konsistigas $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} > \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ de la inica volumeno. Tial tio sufiĉas por ankoraŭ du pliaj lavoj.

- **Mandarinoj**

Se la mandarinoj havas ŝelon je sama dikeco, ĉu estas pli profitdone aĉeti la pli grandajn aŭ pli malgrandajn?



Solvo

Pli profitdone estas aĉeti grandajn mandarinajn, ĉar, kun la pligrandiĝo de la radio, la surfaco pligrandiĝas proporcie al la kvadrato de de la radio, do pligrandiĝos ne tiom multe kiom la volumeno kiu pligrandiĝos proporcie al la kubo de la radioj.

- **La glaso**

Konusforma glaso da trinkaĵo plenplenis. Trinkinte ĝis la duonalteco kiu parto de la trinkaĵo estas restinta?



Solvo

Fakte ni trinkis $\frac{7}{8}$ de la trinkaĵo, kaj restis $\frac{1}{8}$ ĉar la volumenoj proporcias al la kubo de altecoj: $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

- **La rekompenco de la generalo**

Post la batalo, la imperiestro decidis rekompenci sian generalon kiu estis tre avidema. Li proponis al la avidulo orajn cilindroformajn ŝtonojn kiuj estis deponitaj en iu ĉambro. La kondiĉo estis ke la generalo prenu kiun ajn ŝtonon portebla de li mem, sed tiucele la generalo ne havis sufiĉe da tempo por pripensiĝi. Kompreneble la generalo volis preni ŝtonon kiom eble pli grandan, sed porteblan. Kiamaniere agis li?

Solvo



La generalo devus elkalkuli kiom granda estus la ŝtono. Ni supozu ke li povus porti maksimume 100 kg. Dividite per la specifika denseco de oro je 19300 kg/m^3 , ni trovas ke la volumeno de la cilindroforma ŝtono devus esti

$$100 \text{ kg} : 19300 \text{ kg/m}^3 = 0.0052 \text{ m}^3 = 5200 \text{ cm}^3.$$

La volumeno de la cilindro troviĝas per la proksimuma formulo

$$V = 3.14 \cdot R^2 \cdot L \text{ (R radio de la bazo, L la alteco aŭ dikeco de la rado)}$$

Tial, se ni supozas ke la dikeco estas 10 cm, rezultiĝas

$$R^2 = V : (3.14 \cdot L).$$

Anstataŭante

$$R^2 = 5200 : 31.4 = 165.6 \text{ cm}^2 \text{ aŭ } R = 12.87 \text{ cm}.$$

Do, la ŝtono devus havi diametron 40.7 cm.

Problemoj kun procento

- **Plialtiĝo de la prezoj**

La prezo de iu objekto plialtiĝis trifoje, ĝuste 40 %, 20 %, 10 %. Kiom da % ĝi altiĝis entute?



Solvo:

Komence la prezo de la objekto havis la valoron m , poste ĝi fariĝis 1.40 m .
La duan fojon ĝi fariĝis

1. $20\% \cdot 1.40m$ aŭ 1.68 m ,
Dum la trian fojon

1. $10\% \cdot 1.68m = 1.848m$

Sekve, ĝi altiĝis entute 84.8 % kaj ne 70 %, (40 + 20 + 10), kiel erare respondas kelkaj lernantoj. .

- **La prezo de la varo**



La prezo de la varo altiĝis komence je 40%, poste ĝi malaltiĝis 30 %. Kiam ĝi kostis pli, nun aŭ tiam?

Solvo:

La prezo estis m. Fariĝis 1.40 m, duan fojon fariĝis $1.40 \cdot 0.70 = \mathbf{0.91m}$.
Definitive nun la prezo estas **9 %** malpli ol dekomence!

La butiko

- *La butiko estigis malpliigon de la prezoj je 10 % , tamen ĝi certigis profiton je 8%. Kiom da % da profito estis antaŭvidite de la butiko dekomence?*



Solvo

90% de la profito konsistigas 108 % de la valoro de la varo nun.
Dum 100 % konsistigas x. Helpe de la “Regulo de trio” ni trovas ke
 $x = 100 \cdot 108 / 90 = 120 \%$. Do, la antaŭvidita profito estis 20 %.

- **La rendimento**

Laboristo kurtigis la labortempon je p%, kiom da % plialtiĝis ĉi kaze la rendimento?



Solvo

Ne hastu diri ke la rendimento altiĝas $p\%$!

Ni supozu ke por unu detalo bezonatas 1 laborhorro. Nun bezonatas $(1 - p/100)$ malpli da laborhorroj por produkti la varon. Do, dum unu laborhorro produktiĝas

$1 / (1 - p/100) = 100 / (100 - p)$ pecoj pli aŭ entute $100 / (100 - p) - 1 = p / (100 - p)$ detaloj.



Laboristo

Je procentoj tio signifas $100p / (100 - p) \%$. Tiel, se $p = 50$, la rendimento plialtiĝos 100, t. e. dufoje.

- **La fiŝoj**

En baseno estas 198 ruĝaj fiŝoj kaj du nigraj. Do la procento de la ruĝaj fiŝoj estas $198/200 = 0.99$ aŭ 99% . Kiom da ruĝaj fiŝoj devas foriĝi el la baseno tiel ke ties procento fariĝu 98% , t. e. malgrandiĝi 1% ?

Atentu, ne hastu, apliku la regulon per kiu troveblas la procento.



Solvo: Ni supozu ke ni devas forigi x ruĝajn fiŝojn. En la baseno restos $(198 - x)$ ruĝaj fiŝoj kaj $(200 - x)$ fiŝoj ĝenerale. Tial la nova procento rezultiĝas:
 $(198 - x) / (200 - x) = 0.98$ aŭ $198 - x = 196 - 0.98x$
de kie $0.02x = 2$ kaj $x = 2 : 0.02 = 100$
Konklude, por malgrandigi la procenton nur unu procenton, ni devas forigi 100 ruĝajn fiŝojn, kio ne kompreneblas tuje!

- **Du televidiloj**

Unu televidilo de marko A kostas 50% pli ol la televidilo de marko B. Ĉu vi povas diri kiom da procentoj malpli kostas la televidilo de la marko B ol la televidilo de la marko A?

Atentu, ne hastu diri tuje 50 %



Solvo: Se ni notu per b la prezon de la televidilo de marko B kaj per a la prezon de la televidilo de la marko A, ni havus $a = 1.5b$ de kie $b = (1/1.5)$ a aŭ $2/3$, proksimume 66 %!

- **La aĉetkapableco**

La prezo de iu varo malpliigis 20 %. Kiom da % pli ni povas aĉeti pliajn varojn nun?



Solvo

La novaj prezoj konsistigas $\frac{4}{5}$ de la malnovaj prezoj, sekve per la mono elspezebla komence nun ni povas aĉeti $\frac{5}{4}$ foje pli, t. e. 25 % pli.

- **La monsendo**

Por la monsendo oni elprenas komisiaĵon je 2 %. Kiom da mono minimume devus sendi mi kondiĉe ke la ricevonto ekhavu almenaŭ 100 L?



Solvo

Ĉar por la serĉata monsumo x veras la malegalaĵo $x - 0.02x \geq 100$, tiam

$100 \leq x(1 - 0.02)$, aŭ $x \leq 100/0.98 \leq 100$, aŭ $x \approx 102.05$ L.

Miksaĵoj

- *Laŭ kiu proporcio devas miksiĝi la likvaĵo kaj ties salo por ke ricevu 100 g da solucio je koncentro 20%?*



Solvo

En 100 g da solucio enteniĝas 20 g salo kaj 80 g likvaĵo. Ĝuste laŭ tiu proporcio oni devas miksi la likvaĵon kun ties salo.

- *Laŭ kiuj proporcioj oni devas miksi 50 % da solucio je acidaĵo kaj 70% solucio da acidaĵo por ke akiru solucion je 65 % da acidaĵo?*

Solvo

Ni supozu ke oni miksas x g da solucio je 50% kaj y g da solucio je 70 % da acidaĵo. Tiam en la unua solucio enteniĝas pura acido je $50/100 x$ g dum en la duan $70/100 y$ g. En la akirita solucio je maso $(x + y)$ g enteniĝos $(50x + 70y) / 100$ g da pura acido kiu devas konsistigi 65 % de la miksaĵo, t. e. $65/100 * (x + y)$ g. Tiel ni akiras la ekvacion $(50x + 70y)/100 = 65/100 * (x + y)$ aŭ $50x + 70y = 65x + 65y$, aŭ $15x = 5y$. De ĉi tie rezultiĝas $x/y = 5/15 = 1/3$, kio signifas ke ni devas miksi 1 parton el la unua solucio kun 3 partojn el la dua solucio.

La mara salo

- *Kiom da dolĉa akvo aldonendas en 4 kg da mara akvo por ke ni reduktigu la enhavon de la salo en ĝi je 2.5 fojojn?*



Solvo

Se ni notas per a la enhavon de la mara salo en la mara akvo kaj uzas malnovan kalkul - metodon, ni akiros la skemon

$$a/2.5 = 2a/5 \text{ kaj } a - a/2.5 = 3a/5$$

De ĉi tie rezultiĝas la kvociento $3a/5 : 2a/8 = 3 : 2$ t. e. en 4 kg da mara akvo ni devas aldoni 6 kg da dolĉa akvo.

Tri ujoj

En tri ujoj enestas 100 g da solucio: en la unua 70%; en la duan 60%; en la trian 30%. Miksante ĉi soluciojn, ni devas akiri 250 g da acida solucio. Kian plej grandan kaj malplej grandan koncentrecon povas enhavi la akirita solucio? Kia maniere ni povas akiri 250 g kun 55 % da acido?

Solvo

Por akiri solucion je plej granda koncentreco ni devas miksi la plej grandajn koncentraĵojn de la acido, ĝuste: 100 g kun 70% kaj 100 g kun 60% kaj 50 g kun 30 %. En 250 g da akirita solucio enhaviĝos $70 + 60 + 15 = 145$ g da pura acido konsistiganta $145/250 * 100 = 58\%$. Similmaniere por akiri la malplej grandan koncentraĵon oni devas miksi 100 g kun 30 %, 100 g kun 60% kaj 50 g kun 70 % da acido, entenantaj $30 + 60 + 35 = 125$ g da pura acido konsistiganta $125/250 * 100 = 50 \%$.

Nun ni supozu ke ni miksas x g el la unua solucio, y g el la dua solucio kaj z g el la tria solucio. Tiam 250 g kun 55 % je solucio akireblas nur se plenumiĝas la egalaĵoj $x + y + z = 250$

$$0.7x + 0.6y + 0.3z = 0.55 * 250$$

Ĉi tiu sistemo havas senfinan nombron de solvaĵoj kontentigantaj la malegalaĵojn

$$0 \leq y \leq 100 \text{ kaj } 0 \leq z \leq 100 \text{ kaj } 0 \leq x \leq 100.$$

Envere, post transformiĝoj ne malfacilaj de ĉi tiu sistemo, ni akiros la samvaloran sistemon

$$x = 3z - 125$$

$$y = 375 - 4z$$

kie la grandon z ni konsideras parametron kontentiganta la malegalaĵojn

$$125/3 \leq z \leq 375/4.$$

Ekzemple la valoro $z = 75$ rezultigas la solvojn $x = 100$ kaj $y = 75$, tio estas por akiri 950 g da solucio je 75% ni devas preni 100 g el la unua solucio kaj 75 g el la dua solucio.

Problemoj kun aroj

La kalvuloj kaj nigruloj

En iu ĉambro estas naŭ kalvuloj, 5 nigruloj kaj unu persono ne kalvulo nek nigrulo. Kiom da personoj estas en tiu ĉambro?



Solvo:

En la ĉambro povas esti entute de 10 ĝis 15 uloj inkluzive.

- **Dulingvuloj**

En iu urbo de Kanadio 70 % parolas la francan, dum 80% la anglan. Kiom da % de civitanoj parolas ambaŭ lingvojn?



Montrealo

Solvo

Ambaŭ lingvojn kapablas paroli 50% de la loĝantaro, ĉar el 80% kiuj scipovas la anglan, 30 % ne scipovas la francan (supozeble ĉiu loĝanta scipovas almenaŭ unu lingvon)

Problemoj kun progresioj

La multiĝado de la floroj de la lago

Ni supozu ke akva lilio en la montara lago duobligas sian surfacon surakve ene de semajno. Post 30 semajnoj la tuta lago pleniĝas de ĉi floroj. Post kiom da semajnoj estis plenigita la kvarono de la lago?



Solvo:

Semajnon antaŭe estis plenigite la duono de la lago, semajnon pli antaŭ tiu, kompreneble, estis plenigita la kvarono de la laga surfaco. Tio estas sufiĉis 28 semajnoj por plenigi la surfacon de la lago per akvaj lilioj.

- **La botelo da lakto**

En botelo da lakto enris mikrobo kiu ene de 10 sekundoj duobligas. Oni rimarkis ke la tuta botelo plenplenis je mikroboj post kvar horoj. Ĉu vi povas diveni kiam ĝi duonplenis je mikroboj, kiam ĝi kvaronplenis je tiaj?

Atentu, ne hastu diri post du horoj, aŭ post unu horo!



Solvo:

Ene de dek sekundoj la mikrobo duobligas sian volumon okupanta en la botelo. Ene de kvar horoj aŭ 4×3600 sekundoj = 14 400 sekundoj, ĝi estas okupinta la tutan botelon. Dek sekundoj antaŭe ĝi certe estas okupinta nur la duonon de la botelo, dum dudek sekundoj antaŭe la kvaronon. Do la respondoj estas respektive 14 390 sek. kaj 14 380 sek.

La prezo de la ĉevalo



Kamparano volis vendi sian ĉevalon kontraŭ prezo el 200 000 Lekoj. Tiu monsumo ŝajnis sufiĉe granda al iu aĉetanto. Tiam la kamparano ofertis alian pagmanieron: por la unua najlo de la hufferaĵoj oni pagu unu Lekon, por la dua najlo 2 Lekojn, por la tria kvar Lekojn kaj tiel plu, ĉiam duobligante la monon pagenda ĝis la 24 - a najlo (la ĉevalo havas kvar hufferaĵojn ĉiu el kiuj havas ses najlojn). La aĉetanto akceptis la oferton. Ĉu li gajnis aŭ malgajnis je tio?

Solvo:

Ne, ĉar la monsumo pagenda elkalkuliĝas kie sumo de 24 unuaj terminoj de la geometria progresio 1, 2, 4, 8, 16, 32, do $2^{24} - 1 = 16\,777\,215$ Lekoj!

Solvo: Se ni kalkulas nur kiom da Lekoj la kamparano devas pagi por la 24 a najlo rezultiĝas 1×2, do la produkto de 23 duoj aŭ $= 8\,388\,608$

Lekoj! Ni aldonu ankaŭ la monsumojn por la ceteraj najloj kaj finfine rezultiĝas 16 777 215 Lekoj! (aplikeblas la formulo $S_n = (An \cdot q - A_1) / (q - 1)$ aŭ $(2^{24} - 1) / (2 - 1)$).

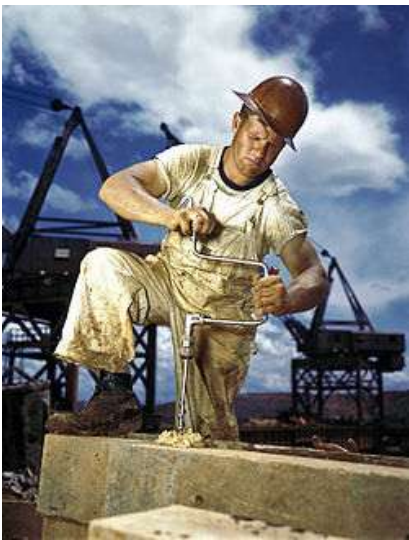
Simile estas la situacio ankaŭ en la jena problemo.

La pago de la laboristo

Iu entrepenisto proponis al du laboristoj pagon por 30 tagoj je du manieroj:

- a) po 100 000 Lekoj tage*
- b) la unuan tagon 1 Lekojn, la duan tagon 2 Lekojn, la trian tagon 4 Lekojn kaj tiel plu ĉiam duobligante la monsumon ĝis la trideka tago.*

Unu laboristo elektis la unuan pagmanieron dum la alia la duan pagmanieron. Kiu el ili gajnis pli da mono?



Respondo: 1 073 741 823 L

- **La duobligo de la loĝantaro**

Se la loĝantaro de iu urbo pliiĝas nur 1% jare, ĉu vi povas elkalkuli post kiom da jaroj ĝi duobligos? Simile, se ni enkasigos monon en la banko je interezo 10% jare post kiom da jaroj ĝi duobligos tie?



Solvo:

Se la loĝantaro nun estas a , post x jaroj ĝi estos

$$a \cdot (1.01)^x.$$

Se ĉi tio egalas al $2a$, rezultiĝas

$$(1.01)^x = 2$$

Surbaze de la logaritmea formulo (kiu aplikeblas eĉ premante la butonojn sur la poŝa elektronika kalkulilo), rezultiĝas

$$X = 70 \text{ jaroj.}$$

Enkaze de la mono deponita en banko kontraŭ interezo 10 % la periodo de duobliĝo rezultiĝas (se oni ignoras la impostojn)

$$x = 7 \text{ jaroj.}$$

- **Disvastiĝo de la novaĵo**

La matematikistoj elkalkulas kiom rapide disvastiĝas la novaĵoj ĉe la urbanaro. Ĉu vi povas diveni, post kiom da horoj ekscios la novaĵon 50 000 loĝantoj se ni supozas ke ene de unu horo unu persono sciigas ĝin al tri aliaj personoj. .

(Kompreneble, ni supozas same ke la novaĵo disvastiĝas nur buŝalbuŝe, ne per radio aŭ televizio.)



Respondo:

Denove uzeblas la formulo

$$N = 1 \cdot 3^x.$$

Ĉi kaze

$N = 50\,000$. Tiam rezultiĝas

$x = 10$ horoj!

Ŝajnas nekredeble, ĉu? Similas al arbo kun multaj branĉoj, el kies ĉiu branĉo eliras tri novaj branĉoj.

- **La ŝparado**

Se mi ŝparas hodiaŭ 1 Lek, morgaŭ 2 Lekoj, postmorgaŭ 4 Lekoj kaj tiel plu, kiom da Lekoj mi ŝparos dum du semajnoj?



Solvo

16 383 L

- **La salajro**

Se la unuan jaron oni pagas min po 20 000 Lekoj monate, poste ĉiun plian jaron la salajro altiĝas 10 %, kiom da jaroj devas pasi por ke mia salajro duobliĝu?



Solvo

Proksimume post 7 jaroj.

Matematikaj ludoj

Ludo kun tri personoj

En iu ludo partoprenas tri personoj. La unuan ludon A perdas dum B kaj C duobligas sian monsumon. La duan ludon B perdas dum A kaj C duobligas sian monsumon. La trian ludon C perdas dum A kaj B duobligas sian monsumon. Fine ĉiu ludanto havis po 24 Lekoj. Kiom da Lekoj ili havis dekomence respektive?

Solvo:

A havis 39 Lekojn, B 21 Lekojn, C 12 Lekojn

Envere, ili havis entute $24 \cdot 3 = 72$ L. Ni deiru de la fina stato kaj prezentu per ciferoj la staton de la mono en la antaŭaj momentoj:

24	24	24
12	12	48
6	42	24
39	21	12

- **Ludo kun kvar personoj**

Ludas kvar personoj kaj en ĉiu ludo la partoprenantoj gajnas aŭ 3, aŭ 2 aŭ 1 aŭ 0 poentoj. Fine de kelkaj ludoj ĉiu el la ludantoj estis gajninta po 21 poentoj. Ĉu vi povas trovi kiom da ludoj okazis entute kun ili?

Solvo:

Kvar personoj estas kolektinte $21 \cdot 4 = 84$ poentoj.

Tio estis akirite post $84 : (3 + 2 + 1 + 0)$ ludoj, do post $84 : 6 = 14$ ludoj

Respondo: 14 ludoj

Aritmetikaj kaj algebraj problemoj

- **Nombroj kun unuoj kaj duoj**

Skribu laŭvice paran nombron da unuoj. Substrahu de tiu nombro similan nombron kun duoj sed je duonkvante, du foje malpli ol unuoj. Ĉu vi ne akiros kompletan kvadraton? Kial do?

Solvo

Ekzemple $1111 - 22 = 1089$ kiu estas ja kompleta kvadrato de 33

111111111111 - 222222 = 111110888889

kiu estas ja kvadrato de 333333

Kial rezultiĝas tiel?

Ni skribu la nombrojn laŭ descendantaj potencoj de 10.

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 10^n + 1 \cdot 10^{n-1} + \dots + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 1 - 2 \cdot 10^{n/2} + 2 \cdot 10^{n/2-1} + \dots \\
 &2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2 = \\
 &1 \cdot 10^n + 1 \cdot 10^{n-1} + \dots + 1 \cdot 10^{n/2+1} + (1-2) \cdot 10^{n/2} + (1-2) \cdot 10^{n/2-1} + \dots (1-2) \cdot 10^2 + (1-2) \cdot 10 + (1-2) = \\
 &1 \cdot 10^n + 1 \cdot 10^{n-1} + \dots + 1 \cdot 10^{n/2+1} + (-1) \cdot [10^{n/2} + 10^{n/2-1} + \dots + 10^2 + 10 + 1] = \\
 &1 \cdot 10^n + 1 \cdot 10^{n-1} + \dots + 1 \cdot 10^{n/2+1} + (-1) \cdot [(10^{n/2+1} - 1) / (10 - 1)] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (10^{n+1} - 1) / (10 - 1) + (-1) * [(10^{n/2+1} - 1) / (10 - 1)] = [(10^{n+1} - 1) + (-1) \\ & (10^{n/2+1} - 1)] / 9 = \\ & (10^{n+1} - 10^{n/2+1}) / 9 = 10^{n/2+1} * (10^{n+1-n/2-1}) / 9 = 10^{n-n/2} / 9 \end{aligned}$$

Ĉar $(n - n/2)$ estas para nombro, ekzistas la kvadrata radiko de $10^{n-n/2} / 9$

- **Martin kaj Martina**

Martin diris al Martina: mi estas trifoje pli aĝa ol vi estis, kiam mi estis tiom kiom vi nun. Martina diris: kiam mi estos tiom kiom vi estas nun, kune ni estos 77 jaroj. Kiom jara estas ĉiu el ili?



Solvo: 33 dhe 22

Envere: Ni notu per x la aĝon de Martin kaj y tion de Martina. Ekestas la ekvacioj

$$x = 3*[y - (x - y)] \text{ kaj } x + x + (x - y) = 77$$

Rezultiĝas

$$x = 3*(2y - x) \text{ kaj } 3x - y = 77$$

Rezultiĝas

$$x = 6y - 3x \text{ kaj } 3x - y = 77$$

Rezultiĝas

$$4x - 6y = 0 \text{ kaj } 3x - y = 77$$

Rezultiĝas

$$4x - 6y = 0 \text{ kaj } 18x - 6y = 462$$

Rezultiĝas

$$14x = 462$$

$$\text{De kie } x = 462 : 14 = 33$$

$$\text{kaj } y = 3 \cdot 33 - 77 = 99 - 77 = 22$$

Do 22 kaj 33

Renkontiĝo

Geparo de junuloj difinis renkontiĝon en biblioteko je 18 - 00 horo. Sed la junulo havis horloĝon je difekto: ĝi antaŭeniras 10 minutoj, kontraŭe li pensis ke ĝi malantaŭenira 5 minutojn. Dum la junulino havis horloĝon same kun difekto: ĝi malantaŭeniras 5 minutoj, sed ŝi pensas ke ĝi antaŭeniris 10 minutojn. Ĉu ili renkontiĝos envere je 18 - 00 horo? Kiu alvenos pli frue, kiom da minutoj?



Respondo:

Ne hastu respondi. Rememorigu kion signifas “ la horloĝo iras 5 minutojn malantaŭen”. Se ĝi malantaŭeniras 5 minutojn, la 18 - 00 horo indikos fakte 6 sen 5, dum kiam ĝi antaŭeniras 5 minutojn, ĝi fakte notas 6 - 05. . Prikonsiderante ĉi fakton, rezultiĝas ke la junulo alvenas duonhoron antaŭ la junulino, respektive je 17 - 45 horo, dum la junulino je 18 - 15.

La problemo de Ĵek Londono

Laŭlonge de la glaciigita vojo de Skajnej ĝis la tendaro oni uzis glitveturilon tirata de 5 hundoj. La unuan tagon la glitveturilo iris je plena rapideco, konforme al la antaŭvido. La duan tagon 2 hundoj forlasis la glitveturilon. Tiel la rapideco falis ĝis $\frac{3}{5}$ de la inica rapideco. Tio rezultigis malfruon je du tagoj. Se du hundoj marŝus ankaŭ pliajn 50 mejlojn la malfruo estus nur unu tagon. Ĉu vi povas trovi kiom mejloj longa estis la vojo?



Ĵek London (1876 - 1916)

Solvo

Do, 50 mejloj korespondas al unu tago.

100 mejloj korespondas al du tagoj. T. e. je la fino de la unua tago plurestis trairenda ankaŭ pliaj 100 mejloj da vojo. 50 mejloj se oni ekzercis kompletan rapidecon kurtigus la tempolimon unu tagon. Se veturus je kompleta rapideco, antastataŭ 100 mejloj ili estigus $100 \cdot \frac{5}{3} = 166 \frac{2}{3}$ mejloj.

$66 \frac{2}{3}$ mejloj ŝparas 2 tagoj da veturado.

Tiam la kompleta rapideco estas $33 \frac{1}{3}$ mejloj tage.

La unuan tagon ili trairis $33 \frac{1}{3}$ mejloj. Entute $33 \frac{1}{3} + 100 = 133 \frac{1}{3}$ mejloj

- La nacieco kaj profesioj

(en la revuo MONATO, antaŭ kelkaj jaroj oni publikigis la jenan problemon):

En kvin domoj unu apud la alia loĝas kvin viroj (norvego, dano, svedo, anglo, germano). Ĉiu el ili bredas unu specon de besto (fiŝo, birdo, hundo, kato, ĉevalo)



La domoj havas diversajn kolorojn (ruĝa, flava, blanka, verda, blua). La viroj trinkas unu specon da likvaĵo (lakto, kafo, biero, teo, akvo). Ili ludas per iu muzikilo (gitaro, harmoniko, piano, trombono, violono).



Norvego loĝas en la unua domo maldekstre; anglo loĝas en la ruĝa domo; la verda domo situas maldekstre de la blanka domo; dano trinkas teon; ludanto en piano loĝas apude de la katobredisto; loĝanto en la flava domo, ludas violonon; germano ludas per harmoniko; loĝanto en la meza domo trinkas lakton; ludanto per piano najbaras al la akvotrinkanto; la trombonisto bredas birdon; la svedo bredas hundon; ĉevalbredisto loĝas apud la flava domo; norvego loĝas apud la blua domo; ludanto per gitaro trinkas bieron; en la verda domo oni trinkas kafon.

Demando: kiu bredas fiŝon?

La solvon trovis almenaŭ du el miaj studentoj (L. T. kaj E. N.) pro kio oni eĉ rekomencis ilin per libroj fare de la revuo. Jen ilia solvo:

Domo 1	Domo 2	Domo 3	Domo 4	Domo 5
Norvego	Dano	Anglo	Germano	Svedo
Flava	Blua	Ruĝa	Verda	Blanka
Violono	Piano	Trombono	Harmoniko	Gitaro
Akvo	Teo	Lakto	Kafo	Biero
Kato	Ĉevalo	Birdo	Fiŝo	Hundo

Matematikaj Enigmoj

Ĉi tie inkluziviĝas ludoj baziĝantaj sur la uzado de la matematikaj scioj

La naskiĝjaro

Substrahu el via naskiĝjaro la sumon de ties kvar ciferoj. Ĉu vi ne ricevas nombron dividebla ĉiam per 9? Kial do?



Solvo:

Ni supozu ke m, c, d, u estas kvar ciferoj konsistigantaj la naskiĝjaron nombron.

$$1000m + 100c + 10d + u - (m + c + d + u) = 999m + 999c + 9d \\ = 9(111m + 11c + d)$$

Kiel vidite, ĝi ĉiam divideblas per 9!

- **Diveno de la tago kaj monato de la naskiĝo**

Notu surpapere, ne sciigante tion al mi, la tagon de via naskiĝo, ekz. 17. Duobligu ĉi nombron. Tio estas $17 \cdot 2 = 34$.

Poste dekobligu ĝin, t. e. $34 \cdot 10 = 340$.

Aldonu al ĉi rezultato 73, t. e. $340 + 73 = 413$.

Multipliku la novan rezultaton per 5, t. e. $413 \cdot 5 = 2065$. Aldonu al ĉi tiu produkto la laŭvican nombron de la monato de via naskiĝo, ekz. 10. Rezultiĝas 2075. Montru al mi ĉi lastan rezultaton.



Solvo:

Substrahu $2075 - 365 = 1710$

Observu ĉi numeron: la du unuaj ciferoj donas la naskiĝtagon 17, dum la ceteraj du tiun de la monatinaskiĝo. :10

Provu mem per alia tago kaj monato kun via gekamarado.

• **Kiun ciferon mi forviŝis?**

Pripensu kiun ajn nombron, ekz. 27.

Multipliku ĝin per 10, t. e. 270.

Substrahu el ĝi la nombron pripensita dekomence, t. e. $270 - 27 = 243$

Aldonu 45, t. e. $243 + 45 = 288$

Forviŝu nun kiun ajn ties ciferon diversa al nul. Sciigu al mi la rezultaton, ekz, forviŝinte 2, rezultiĝus 88.



Solvo:

Ni elkalkuli la sumon de la ciferoj $8 + 8 = 16$. La plej granda multoblo de 9, proksima al 16 estas 18. Nun ni substrahu de 18 la nombron 16, $18 - 16 = 2$ Tiel kompreneble ni estas forviŝinta la ciferon 2. Ne miru, vi mem povas trovi la sekreton!

Alia ekzemplo:

Mi pripensis la nombron 324. Post multipliko per 10 rezultiĝos 3240, post substraho de 324 rezultiĝos $3240 - 324 = 2916$

Supozeble mi forviŝas la ciferon 6, do rezultiĝas 191. La plej proksima multoblo de 9 pli granda ol la sumo $2 + 9 + 1 = 12$ estas 18. Ni substrahu la trovitan sumon de la cifero, 12, kaj rezultiĝas la forviŝita cifero 6.

Provu nun mem ĉi proceduron se la lasta rezultato estus 157!



- **La ringo en la fingro**

Enigu ringon en la kvina fingro, sur la dua nodo de la persono N_4 (kie 4 estas la numero de la persono)

Mi trovos la personon, la fingron, la nodon, post kiam mi aldemandos la jenon:

Multipliku la personan numeron per 2

Aldonu la fingran numeron

Multipliku ĉi tion per la fingra numero

Aldonu la fingran numeron

Multipliku per dek

Aldonu la nodan numeron

Montru la rezultaton.



Solvo

Mi substrahu el la rezultato 250 akirante triciferan nombrojn kie la unua cifero indikas la personon, la dua cifero indikas la fingron kaj la tria cifero la nodon.

Envere, ĝenerale :

Ni notu per a la numeron de la persono; per b tiun de la fingro kaj per c tiun de la nodo.

Tiam, niaj ordonoj esprimiĝas per literoj tiel:

$$a \cdot 2 = 2a$$

$$2a + 5$$

$$(2a + 5)5 = 10a + 25$$

$$10a + 25 + b = 10a + b + 25$$

$$(10a + b + 25)10 = 100a + 10b + 250$$

$$100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$$

Ĉi tie a estas la cifero de centoj, b la cifero de dekoj.

Ekzemplo.

La persono N_2 ; la fingro 3; la nodo 1.

$$[(2 \cdot 2 + 5) \cdot 5 + 3] \cdot 10 + 1 = (9 \cdot 5 + 3) \cdot 10 + 1 = 48 \cdot 10 + 1 = 480 + 1 = 481$$

$$481 - 250 = 231$$

Ĉi tie 2 indikas la personon, 3 la fingron kaj 1 la nodon.

Alie:

Persono 5, fingro 1, nodo 2

$$[(5 \cdot 2 + 5) \cdot 5 + 1] \cdot 10 + 2 = (15 \cdot 5 + 1) \cdot 10 + 2 = 76 \cdot 10 + 2 = 760 + 2 = 762$$

$$762 - 250 = 512$$

Aliaj ludoj

- La nigraj kaj blankaj cirkloj

		•		0	O	O
--	--	---	--	---	---	---

Trairigu la nigrajn cirklojn anstataŭ la blankaj kondiĉe ke unu nigra cirklo povus transpasi unu blankan cirklon kaj inverse se post ĝi estas libera loko.

Solvo

Nigra cirklo moviĝas unu lokon dekstren.

La blanka moviĝas du lokojn maldekstren.

La nigra 3 movoj dekstren.

La blanka tri movoj maldekstren.

La nigra tri movojn dekstren.

La blanka du movojn maldekstren.

La nigra 1 movon dekstren.

(se estas $(2n + 1)$ lokoj oni porcedu tiel: Nigraj cirkloj unu movo, blankaj du, nigraj tri movoj, blankaj kvar, . . . ĝis n , poste denove n , $n - 1$, $n - 2$, ktp)

Matematikaj sofismoj

- La elefanto kaj la muŝo

Ni supozu ke la maso de la elefanto estas x , dum tiu de la muŝo y .

Ni notu ilian sumon $x + y = 2v$, aŭ $x - 2v = -y$ aŭ $x = -y + 2v$

Ni multipliku ambaŭ lastajn egalaĵojn

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$$

Adiciu al ambaŭ flankoj v^2

$$(x - v)^2 = (y - v)^2$$

De kie $x - v = y - v$

aŭ $x = y$. ?!

Kie ni eraris?



Respondo

Estas sciite ke $\sqrt{a^2} = |a|$

$x - v > 0$ dum $y - v < 0$

- $2n - 1 < 2n$

Ni multipliku per $(-a) \neq 0$ kie $a > 0$

$$-2na + a < -2na$$

Aldonu al ambaŭ flankoj **2an**

Rezultiĝas $a < 0$

Alia

- Estas donite la sistemo:

$$2x + y = 8$$

$$x = 2 - y/2$$

Ni anstataŭ $4 - y + y = 8$

Rezultiĝas $4 = 8 !!!$

Noto:

Ĉi tiu sistemo ne havas solvon.

Alia

- $6x + 15 = 10x + 25$

$$\text{aŭ } 3(2x + 5) = 5(2x + 5)$$

Ni dividu per $2x + 5$

Rezultiĝas $3 = 5$!!!

Noto:

La inica ekvacio havas radikon $x = 2.5$. Ni estas dividinte per $2x + 5 = 0$!?

- **Kiel oni eksplikas ke:**

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2 ; a(a - a) = (a - a)(a - a); a = a + a; a = 2a \text{ ?!}$$

- $b + c = a; (b + c)(a - b) = a(a - b); ab + ac - b^2 - bc = a^2 - ab; ab + ac - a^2 = b^2 + bc - ab; a(b + c - a) = b(b + c - a); a = b \text{ ?!}$

- Ni supozu ke $x = 1$; tiam $x^2 = 1; x^2 - 1 = 0 ; (x + 1)(x - 1) = 0; x + 1 = 0 ; x = -1 \text{ ?!}$

- $16 - 36 = 25 - 45; 16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4 ;$

$$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2 ; 4 - 9/2 = 5 - 9/2 ; 4 = 5 \text{ ?!}$$

Atentu: Malpermesatas la divido per nul!, la dua radikoj de kvadrata nombro egalas al ties absoluta valoro!

- **Interesa rezultato**

Multipliku vian aĝon per 7

Nun multipliku ĝin per 1443

Kio rezultiĝas? Ĉu tio ne estas interesa?



Envere: ni supozu ke mia aĝo estas 17 jara, tiam $17 \cdot 7 \cdot 1443 = 171717$

Ĝenerale:

$m \cdot 10 + n$ estas mia aĝo

Ni multipliku per 7

$$(m \cdot 10 + 7) \cdot 7 = 7m + 49$$

Ni multipliku per 1443

$$7m \cdot 1443 + 49 \cdot 1443 = 10101m + 70707 = 10101 \cdot (m + 7) = 10000 \cdot (m + 7) + 1 \cdot 100 \cdot (m + 7) + 1 \cdot (m + 7)$$

Anekdotoj

- **La trajnbiletoj**

Kelkaj studentoj de matematiko kaj kelkaj studentoj de inĝenierio vojaĝis per trajno ire kaj devene. La unuaj aĉetis po unu bileto ĉiu, dum el inĝenieroj aĉetis bileton nur unu el ili. Tio ege mirigis matematikistojn kiuj ekobservis la situacion. Enirinte la vagonon, unu el la inĝenieroj kriis: alvenas la kondukto! Tuj ĉiuj inĝenieroj fermiĝis en la banejo de la vagono. Alvenis la kondukto, kontrolis la biletojn kaj fine frapis sur la pordo de la banejo dirante: bileton, mi petas! La pordo oni malfermetis kaj el ene etendiĝis mano kun bileto. La konduktori dankis kaj foriris.



Revene, la matematikisoj aĉetis nur unu bileton. . dum inĝenieroj nenion! Tio denove ege mirigis matematikistojn kiuj observis denove kio okazus ĉiĵoj. Post iomete, unu matematikisto kriis: alvenas la kondukto! Tuj ĉiuj matematikistoj fermiĝis en la banejo de la vagono. Samtempe la grupo de inĝenieroj fermiĝis en la alia banejo de la vagono. Sed tuj poste unu el inĝenieroj iris al la banejo de matematikistoj, frapis sur ties banejo kaj per iom ŝanĝigita voĉo diris: bileton, mi petas! Oni malfermetis la pordon kaj

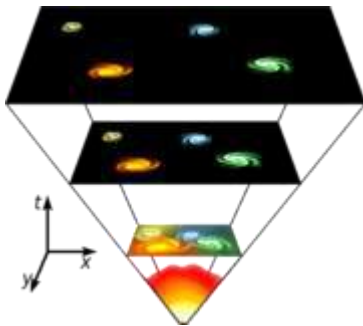
etendis manon kun bileto. Tion prenis inĝeniero kaj tuj revenis ĉe liaj kamaradoj en la alia banejo. Alvenis la kondukto, kontrolis la biletojn en la vagono, poste frapis en la banejon de inĝenieroj kie nun ĉio bonordis. . . dum kiam li frapis en la banejon de matematikistoj ĉio skandaligis. .

- **Bing Bang**

Diskutadis iufoje kirurgo, matematikisto kaj politikisto rilate la temon “kiu profesio estis plej malnova?”. Kirurgo diris ke plej malnova estis lia profesio, ĉar devus esti kirurgo tiu kiu eligis Eva - n de iu ripo de Adamo. . .

- Ne, kontraŭis lin matematikisto, ĉar antaŭ ol ekzistis Adamo kaj Eva estis ja Bing Bang - o, granda ĥaoso. Dio, ja bezonis pri matematikistoj ekde komenco por ke instruu Lin kiamaniere uzi la teorion de ĥaoso.

- Vi eraras, diris politikisto, ĉar ĉu vi ne opinias ke la ĥaoson kreis ja ni, politikistoj?!



Plilarĝigo de universo laŭ modelo de Bing Bang

- **Malpravigo**

En iu gazeto oni skribis iutage ke 1/3 de parlamentanoj estas ŝtelistoj.

La registaro demandis klarigojn far de gazeto kaj sugestis ke ĝi malpravigu la novaĵon.

La morgaŭon, la gazeto skribis: la triono de la parlamentanoj ne estas ŝtelistoj!?



Problemo

- Kio estas $2 + 2$?
- Matematika problemo!!

• Polusa urso

Instruisto: Kia estas la difino de la polusa urso?

Lernanto: Urso estas rektangulo post transformiĝo de la koordinata sistemo.



• La trompiĝo

Antaŭ renoma juvelaĵejo en Romo, haltis limuzino. Elaŭtiĝis sinjoro bone vestite kun brako bandaĝita. Li elektis unu el la plej multekostaj juvelaĵoj je prezo 60 000 liroj. Elpoŝigis la monujon kaj rimarkis ke en ĝi enestis nur 10 000 liroj. Li pravigis sin kaj petis la vendiston ke li helpu lin skribi paperletereton por sia edzino. La vendisto akceptis kaj skribis per sia manotieron kion diris la kliento:

“Kara, mi petas vin tuj enmanigu al la ŝoforo alportonta ĉi leteron 50 000 liroj kiujn mi bezonas por ĝisaĉeti belegan juvelaĵon. Ĝis, via. . ”.



Ĉi leteron la sinjoro transdonis al sia ŝoforo kaj ordonis lin tuj veturi al sia hejmo kaj revenu kun mono. Dumtempe li mem plurestis ĉe la juvelaĵejo. Post iom da tempo, la ŝoforo revenis kun 50 000 liroj. La sinjoro kvitiĝis kun la vendisto, prenis la juvelaĵon kaj malaperis.



Vespere la edzino de la vendisto petis sian edzon ĉu envere valoris ke li aĉetu tiom multekostan juvelaĵon. Nur tiumomente la vendisto komprenis kiom genieca estis ja la trompaĵo, kies viktimo estis mem li.

La tajloro

La tajloro Tvirno embarasiĝis. La morgaŭon, lastan tagon de la monato, li devis pagi la salajrojn kaj la lupagon, sed la mono ankoraŭ ne estis en sia kaso.

Li renkontas en la stacidomo la bankestron, Frankon, bona kliento sed dubinda kvitanto. Ankoraŭ nun li ŝuldis al la tajloro 185 markojn, kiuj estus savindaj por li tiumomente. Sed la bankestro estis entreprenonta longan vojaĝon. Tial sinjoro Tvirno kuraĝis, proksimiĝis kaj petis lin pagi. La bankestro elpoŝigis banknoton je 1000 markoj kaj diris: ĉu vi povas redoni min 815 markoj? Sed la tajloro kiu apenaŭ disponis monon tiumomente, respondis: tuje, plezure! Kaj ekkuris al la biletejo. Sed tiea oficisto ne disponis tiom da mono. - Iru al la poŝtejo ĉi apude - konsilis li - Tie certe oni povos fari tion.



Sed ankaŭ tie la oficisto disponis nur 500 markojn. Lia kolego havis ĉirkaŭ 400 markoj, sed ankaŭ ĉi tiuj ne sufiĉis. La tajloro petis ke ili donu al li almenaŭ 815 markoj, kaj pretis garantiigi ilin donate la banknoton je 1000 markoj. Sed tio iel komplikigis la situacion ĉe poŝtistoj. Cetere, ili ne volis seniĝi je ĉiuj moneroj, tial rifuzis.

La majstro senesperigis. La stacidomo kaj la poŝtoŝtanco situis for de la urbo, ankaŭ la hotelo aŭ restoracio ne apudis. Cetere, li devus reveni kaj redoni la monon al la bankisto ĉar la trajno ekirus baldaŭ. Tamen ekzistis ankoraŭ tre simpla maniero por ke li ricevu la monon. Ĉu vi povas diveni tion?



Solvo

La tajloro devus sendi al la poŝtoŝtanco poŝtan monordonon je 185 markoj al sia adreso. Tiam la oficistoj devus redoni al li 815 markojn ĉar tiom da mono ili ja disponis tiumomente.

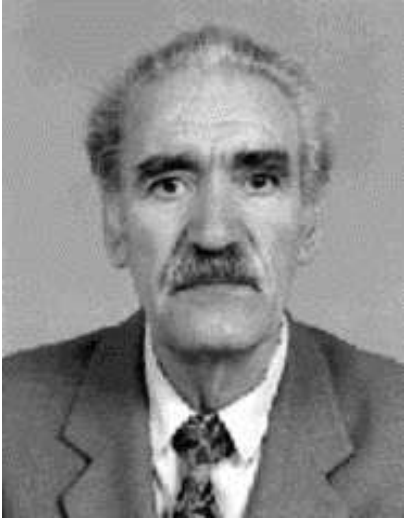
• Profesoro

Iu profesoro de matematiko diris al siaj du studentoj tre promesantaj kaj talentulaj, Paŭlo kaj Stefano::

"Nun mi pensas du naturajn nombrojn x kaj y , kies sumo estas maksimume 100, dum $1 < x < y$

Al vi, Paul mi sciigas kaŝe la produkton de x kun y .

*Dum al vi Stefano mi sciigas same kaŝe ties sumon.
Nun klopodu, ĉiu el vi, konkludi pri x kaj y . Kompreneble, ne diru unu al la alia tion kiun mi sufleris al vi, aparte. ”*



Petko Arnaudov

Kaj, dum longa tempo de intensa meditado, ambaŭ studentoj ne interŝanĝis informaĵojn pri la produkto kaj sumo de nekonataj nombroj. Poste, ekis mistera dialogo:

Paŭlo: Ne, mi ne povas trovi x kaj y .

Stefano: Ho, tion mi jam sciis.

Paŭlo (surprizita kaj post iom da meditado): Tamen mi jam trovis x kaj y .

Stefano (same): Ankaŭ mi jam trovis x kaj y .

Kaj ili pravis. Kiun paron $(x; y)$ ili jam trovis?

Noto: Nur unu paro $(x; y)$ koincidas al ilia dialogo!

Solvo

Estas du naturaj nombroj, diversaj unu de la alia kaj ĉiu pli granda ol 1, tiaj ke ilia sumo ne transas 100. Certe, pli da informacio disponas Paŭlo kiu jam konas la produkton de x kaj y . Ĉar li devas trovi ĉiuj divizorojn de la produkto kaj esplori ilin por ke kontrolu se multiplikinte po duope ili

rezultigu la donitan produkton. Ĉi kaze se ekzistas nur unu duopo tia, ĝuste tio estus la solvo. Certe tio okazus se la duopo konsistus el primoj.

Devas okazinta tiel ke Paŭlo diris ke li jam divenis la solvon. Tiu diraĵo igis Stefanon trovi la paron, ĉar li jam pretigis ĉiujn parojn kies sumon li jam sciis. Sed dum ĉi paroj donas diversajn produktojn, li devus fari tion por ĉiu produkto, kiel faris Paŭlo.

Ni prikonsideru la nombrojn 11 kaj 17. Ilia produkto estas 187, kaj Paŭlo post kiam faktoris trovis nur du faktorojn, 11 kaj 17. kaj diras ke li trovis la solvon. Dum Stefano konas ilian sumon, sed nur unu paro konsistas el primoj. Kiam Paŭlo diris ke li trovis la solvon, tiam ankaŭ Stefano haltis ĉe la paro (11, 17)

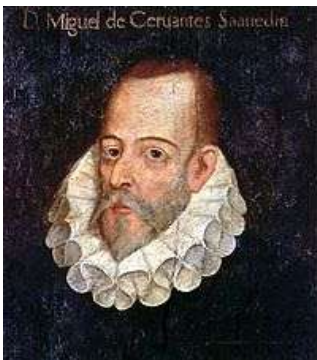
- **La pendumigilo**

En la romano “Don Kiŝoto” de Miguel Servantes troviĝas ankaŭ la jena afero:

Estas ponto super la rivero. Apud ĝi estas pendumigilo kaj juĝistaro el tri personoj. Ili demandas de ĉiu persono trapasanta sur la ponto diri, ĵurante, kien li iras kaj kion intencas fari. Se li diras la veron, li rajtas daŭrigi la vojon, kontraŭe oni pendumigos lin, laŭ malnova leĝo.

Intage alvenas viro kiu diras: “Mi ĵuras ke mi trapasas ĉi ponton por ke oni pendumigi min!”

Lia diraĵo embarasigas la juĝistojn. Ĉar ili resonadis: Se ni ne permesas al ĉi viro daŭrigi la vojon, tio signifus ke li ĵuris erare tial ni devas pendumigi lin. Sed se ni pendumigos lin, tio signifas ke li diris la veron, tial li devas pluvivi laŭ la leĝo. Kion faru la juĝistoj?



Cervantes

Solvo: Jen kian respondon sugestis mem Sanço Panço, amiko de Don Kiŝoto: Pendumigu tiun parton de la viro kiu mensogis kaj lasu libera la ceteron daŭrigi sian vojon.



Don Kiŝoto kaj Sanço Panço

- **Diablo**

Iufoje la diablo volis kapti la animon, sed renkontis filozofon diranta:
- *Kian rekompenco vi donus al mi se mi promesus vin mian animon?*

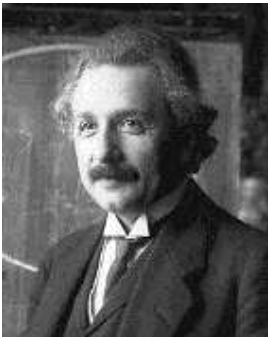


- *Mi fordonus kion ajn vi dezirus.*
- *Ĉu envere vi estas tiom potenca?*
- *Mi kapablas por ĉio pensota de vi!*
- *Kaj se mi postulus de vi ion ne plenumbla de vi mem?*
- *Tiam mi rezignus porĉiame.*

- Bone! Bonvolu faru ŝtonon tiom alta kiom vi apenaŭ transpasos ĝin!

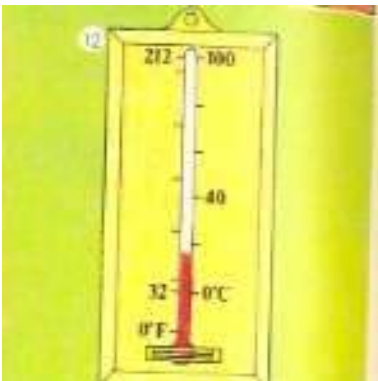
- La diablo pripensiĝis pormomente, poste foriris kaj neiam revenis.

- **Teorio de relativeco**



Albert Einstein

Iu sinjorino el Berlino petis la faman fizikiston Albert Einstein cent jarojn antaŭe: - Sinjoro Einstein, kiom jaroj povas plilongiĝi mia vivodaŭro se mi vojaĝus ĉiamfoje per ekspressa trajno?



- Ho – iomete pripensiĝis la sciencisto - via vivodaŭro plilongiĝus tiom, kiom plialtiĝus la temperaturo de Berlino se ni bruligus kandelon en Moskvo!

Klarigo: La teorio de relativeco diras ke “se ni vojaĝus je rapideco tro granda, komparebla al tiu de lumo en vakuo (300 000 000 x 3600 km/horo) ni povus konstati ian kurtiĝon de la dimensio de la tempo. Sed se ni vojaĝus je rapideco de la ekspresaj trajnoj (kelkcent kilometroj po horo) tia diferenco estas sufiĉe malgranda, preskaŭ ne rimarkebla.

- **La reĝo kaj la ĉefministro**²⁵

La reĝo volis maldungi sian ĉefministron, sed ne ofendante lin. Li alvokis lin kaj diris:

“Estas ĉi tie du paperpecoj. . En la unua estas skribite ke vi maldungiĝos, en la cetera ke vi plurestos en via posteno. Bv. eltiru unu el ili tiel provante vian ŝancon”.



La ĉefministro bone komprenis ke la reĝo estis skribinte en ambaŭ paperpecoj “vi maldungiĝos”, tial li tuj englutis unu paperpecon kaj diris emocie: Ho, pardonu min, Majesteco, mi eraris, sed por ekscii mian ŝancon sufiĉus malfermi la alian paperpecon kaj akcepti ties kontraŭan signifon. .

- **La perfiditaj edzoj**

En la kortego de iu reĝo estis 40 korteganoj kiujn liaj edzinoj perfidis. La reĝo alvokis iutage ĉiujn ilin kaj aldiris: Unu el viaj edzinoj perfidas sian edzon. Mi petas vin esplori kaj forpelu ŝin!

²⁵ Problemo simila estas jam pritraktite antaŭe. . Vidu!



La reĝo atendis 40 tagojn ĝis ĉiuj 40 korteganoj alvenis ĉagrenitaj kaj seniluziigitaj forpelinte siajn edzinojn. Kial do? Ĉar ĉiu el ili nun opiniis ke sia edzino perfidas lin. Ĝis tiu tago ĉiu ekspektis ke tion faru ne li mem sed kelkui alia kortegano. Sed post 40 tagoj evidentiĝis ke ankaŭ lia edzino certe estis perfidinta lin!

- **La ŝerco**

Oni diris pri iu persono ŝerceme ke li estas “ora homo”. Iufoje ĉi tiu petis arĝentiston kiom li valorus envere se li estus tute ora. Li havis mason je 75 kg. La arĝentisto elkalkulinte, konvertis 75 kg al 75 000 g kaj multiplikis tion per la valoro de unu gramo da oro. Ĉu li pravis?



Solvo

Ne, ĉar se li estus tute el oro, li pezus tro. Ni devas elkalkuli la volumenon de lia korpo poste tion multipliku per la specifa pezo de la oro kiu estas 19300 kg/m^3 . La specifa pezo de la homa korpo estas malpli ol 1000 kg/m^3 , malpli ol tiu de la akvo!

- **Justeco de piratoj**

En la sino de piratoj ekzistas ia hierarkio, depende de la aĝo, tio signifas estas pirato numero unu, post li pirato numero 2, alia numero 3 ktp. En la kompanio de piratoj oni estis decidinta pri jena regulo laŭ kiu oni devus dividi la forŝtelitan riĉaĵon: la pirato numero unu proponu dividon tian kiu estus akceptebla de la plimulto de la ĉeestantaj piratoj. Kontraŭe, se lia propono ne akcepteblus de la plimulto, la pirato numero unu mortigitus kaj la dividon estigu la pirato numero 2.



Laŭ ĉi regulo, se estus entute du piratoj, la pirato numero unu povus forpreni la tutan riĉaĵon por si mem, ĉar ne ekzistus plimulto kontraŭ lin. . Se estus entute tri piratoj, la pirato numero 1 povus doni ion al la pirato numero 3, por ke kun li estigu plimulton favoranta lin mem. La pirato numero 3 ne havus alian alternativon, ĉar se li kontraŭus la pirato numero unu mortigitus kaj la riĉaĵon forprenus la pirato numero 2. Se estus entute kvar piratoj, samtiel la pirato numero unu devus doni ion al la pirato numero 3. Se estus kvin piratoj, tiam la pirato numero 1 devus doni ion al la pirato numero 3 kaj al pirato numero 5 kaj tiel plu. .

- **Konkuro pro laborposteno**

Matematikisto, statistikisto, librotenisto konkuris pro laborposteno en granda korporacio. La elekta komisiono aldemandis ilin la samon: Kiom estas 500 plus 500? La matematikisto respondis: 1000! La statistikisto respondis: averaĝe 1000! Sed je probableco 95 %. Dum la librotenisto diris: kiom interesus vin estus la rezultato?..

Komprenoble la komisiono elektis la libroteniston. .

La fajro en la ĉambro

Inĝeniero, matematikisto kaj fizikisto dormis en la sama ĉambro de la hotelo, ĉiu el ili en aparta angulo. Dume en la ĉambro eksplodas fajro. La inĝeniero dormanta en tiu angulo, ĵus vekiĝinte, kaj ekvidinte la fajron, prenis kruĉon da akvo kaj enverŝis akvon. Poste li replenigis la kruĉon por ke konservu akvon kiel rezervon kaj endormiĝis ree. Iom poste, denove eksplodis fajro en la alia angulo de la ĉambro ĝuste kie dormis la fizikisto. Ĉi tiu, vekiĝinte, tuj decidis mezuri la intensecon de la fajro. . , observis kia materialo estis bruligata kaj poste prenis la kruĉon da akvo kaj enverŝis akvon en la fajron sed ne la tutan akvon, nur du trionon de ĝi. La fajro estingiĝis komplete. La ceteron de la akvo la fizikisto enverŝis en la lavujon. Poste reendormiĝis ankaŭ li.



Arkimedo

Post iomete la fajro eksplodis ĉifoje en la angulo kie dormis la matematikisto. Ĉi tiu, tuj vekiĝinte, rimarkis ke apud li estis la kruĉo da akvo. Li kontrolis la kruĉon pri eventuala trueto poste malfermis la kranon kaj esploris ĉu estis akvo en la akvoreto. Certigite pri tio li konkludis ke jam ekzistas la solvo por estingi la fajron, tial li enverŝis akvon en la fajron kaj estingis ĝin. Poste ankaŭ li reendormiĝis.

La inĝenieroj

Unu meĥanika inĝeniero, unu elektra inĝeniero kaj unu informadika inĝeniero estis veturante per aŭto. Dumvoje la aŭto haltiĝis. La meĥanika

inĝeniero esprimis la opinion ke mankis petrolo en la petrolujo de la aŭto, sed kontrolinte la koncernajn indikilojn konkludis ke tio ne veras.



Post li, esprimis opinion ankaŭ la elektra inĝeniero, supozante pri iu difektiĝo en la elektra sistemo de la startigilo, sed kontrolinte, li ankaŭ konkludis ke eraris. Fine esprimis opinion la informadika inĝeniero. Pli bone sugestis li, estus ke ili eliru tra la fenestretoj, poste reeniru enen kaj tiam ili ekvidus se la aŭta motoro ekstartiĝus denove!.

- **Statistikistoj**



Tri statistikistoj iris ĉasi anasojn. Unu el ili pafis unu anason sed ne trafis ĝin, ĉar la kartoĉeroj preterpasis unu manplaton super ĝin; la dua pafis sed liaj kartoĉeroj preterpasis unu manplaton malsuper ĝin; tiam la tria pafinte ekkriis ĝoje: la anaso jam estas trafita!

- **La problemo solviĝis**

Unu pastro, unu rabeno kaj unu matematikisto ekzekutiĝontus. Komence oni venigis al la eŝafodo la pastron. La ekzekutisto eltiris la levon de la eŝafodo

kaj lanĉis ĝin rapidece masupren. Sed ĝi haltiĝis du fingrojn antaŭ ol atingi la kolon de la pastro. Tiam la pastro sin turnante al Dio diris: Mi preĝas al Vi, Dio, pro via interveno. La ekzekutisto fidis al li kaj lasis lin libera. La matematikisto ne kredis la parolojn de la pastro.



Samtiel okazis ankaŭ al rabeno. Tiam la matematikisto ekobservis atente la eŝafodon kaj la mekanismon de ties lanĉigo. Kiam la ekzekutisto surmetis lian kapon sur la lignotrunko, la matematikisto petis lin atendi ankoraŭ minuton ĉar li estis kompreninte jam la kaŭzon de malfunkciiĝo de la meĥanismo. Estis, laŭ li, iu lignero malhelpinte la klingon de la eŝafodo ektuŝi la kolon de la viktimiĝonto. Li demetis ĝin kaj diris al la ekzekutisto: Nun la eŝafodo funkcias bone!..

- **De nekonato al la konato**

Inĝeniero kaj matematikisto loĝis en la sama ĉambro. Tie estis elektra forno uzebla por boligi teon. Kutime ili uzis la malantaŭan platon maldekstre. Sed iutage inĝeniero rimarkis ke la teujo estis lokita sur la antaŭa plato maldekstre. Tiam li observis la elektran skemon kaj sekvis la linion indikanta kie estis la ŝaltilo por la antaŭa plato, eksaltis ĝin kaj boligis la teon.



Alian tagon ankaŭ la matematikiso trovis la tejon sur la antaŭa plato maldekstre. Li kondukis ĝin al la malantaŭa plato maldekstre reduktante la problemon nekonatan en problemon konatan antaŭe kaj boligis la teon.

- **La difektita murhorloĝo**

Estis difektita la murhorloĝo de iu persono. Li avertis la ripariston. Ĉi tiu sendis sian helpanton ĉar mem estis tro okupita. La helpanto faris riparis la montrilojn kaj muntis ilin denove. Poste li ŝarĝis la horloĝrisorton kaj akordigis la horon al la sia. Tiumomente la horo notis ĝuste 6 - 00. La grandan montrilon li fiksas al 12, dum la malgrandan al 6. Poste revenis al la laborejo.

Ne malfruis kiam la kliento denove telefonis. Li plendis ke la horloĝo ankoraŭ ne bone funkciis. La helpanto reiris al li.



Mirigite, la horloĝo ankaŭ tiumomente notis ĝuste 8 - 10. , tiom kiom la horloĝo de la helpanto. Ĉi lasta revenis denove al sia laborejo. Morgaŭan matenon, oni aŭdis ree la telefonon tra kiu la kliento plendis ke sia murhorloĝo ankoraŭ ne bone funkciis. La helpanto vizitis lin denove, sed ankaŭ tiumomente la murhorloĝo notis tiom kiom sia manhorloĝo, nome 7 - 05. . . La helpanto volis reiri sed la kliento haltigis lin. Restinte kelkajn pliajn minutojn tie la helpanto, kaj finfine komprenis kie estis la eraro. Ĉu ankaŭ vi, kara leganto, ekkomprenis tion?

Solvo

La helpanto certe estis fuskuniginte la montrilopartojn, la unuan fojon. Tiel la granda montrilo indikis la horon, dum la malgranda la minutojn, do inverse. Post du horoj kaj 10 minutoj la montriloj envere indikis la horon 8 - 10. La granda montrilo, rotacianta kiel hormontrilo, moviĝas malrapide de

12 ĝis 14 (2 - 00). La malgranda montrilo estigas du kompletajn cirklojn kaj 10 minutoj.

Post 13 horoj kaj 5 minutoj la situacio denove normaliĝas. La granda montrilo moviĝos 13 horojn kaj alvenos laŭ direkto al la cifero 1. La malgranda estigas 13 kompletajn rotaciojn kaj 5 minutojn kaj alvenos al la cifero 7.

Kelkaj klasoj de la naturaj nombroj

- **La primoj**

Primoj estas la naturaj nombroj kies divizoroj estas nur 1 kaj ili mem. Ekz. 5.

La malplej granda primo estas 2. Ĉiuj aliaj paraj nombroj ne estas primoj, ekz. 4, 10, 512, ktp.

Tabelo de primoj ĝis 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

Matematikistoj estas malkovrintaj formulojn por prezenti limigitajn grupojn de primoj, sed ankoraŭ ne ekzistas ĝenerala formulo por ili.

Formulo de Leĵandro ²⁶

$2x^2 + 29$ por $x = 0, 1, 1, 2, 3, \dots, 28$ donas primojn. Kontrolu!



Adrien Marie Legendre (1752 - 1833)

Formulo de Euler

$x^2 + x + 41$ për $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$
same donas primojn. Kontrolu!



Leonard Euler sur malnova svisa poŝtomarko

Formulo de Eskoto

$x^2 - 79x + 1601$ por $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 39$ donas primojn.

Interese ke por

$x = 40, 41, 42, \dots, 79$ akireblas la samaj nombroj!

Sed por $x = 80$ rezultiĝas la kvadrato de 41 aŭ 1681, kiu ja ne estas primo!

- **Perfektaj nombroj**

Vidu la nombron 6. Ĝiaj divizoroj estas 1, 2, 3, 6. . Se ni prikonsideru mem 6, la sumo de la divizoroj estas: $1 + 2 + 3 = 6$, do tiom kiom mem la nombro 6.

Tiaj nombroj nomiĝas perfektaj.

Ĉi eon ĝuas ankaŭ 28, ĉar ties divizoroj estas: 1, 2, 4, 7, 14 (sen mem 28) kiuj adiciiĝinte donas ĝuste 28.

Provu la econ por la nombroj 496; 8168. Ne pensu ke tiaj nombroj troveblas facilmaniere!

Ĉu vi povas trovi alajn perfektajn nombrojn < 100 , aŭ < 200 , ktp?

Mi atentigas vin ke la perfektaj nombroj, kontrolitaj per kalkulmaŝinoj estas same: 33550336; 85898690056; 137438691328; ka.

Ĝis nun, perfektaj nombroj estas konstateblaj nur paraj. Ne estas sciite se ekzistas ankaŭ neparaj perfektaj nombroj. Ĉu vi povas diri ion rilate tion?

Kelkaj matematikistoj estas doninte ankaŭ formulojn por “produkti” perfektajn nombrojn.

Tiel Euklido estas dirinte ke se $2^{n+1} - 1$ estas primo (havas divizoron nur 1 kaj sin mem) tiam $2^n (2^{n+1} - 1)$ estas perfekta nombro.

Dum Eulero (svisa matematikisto) estas pruvinta ke ĉiu perfekta nombro havas formon $2^n (2^{n+1} - 1)$.

- **Buntaj nombroj**

Kiam la sumo de la divizoroj transpasas la nombron mem, oni diras ke la nombro estas bunta. Ekz. 12, havas divizorojn 1, 2, 3, 4, 6, krom 12 mem. Ilia sumo estas $16 > 12$

Ĉu vi povas montri kelkaj aliajn buntajn nombrojn?

- **Mankaj nombroj**

Kontraŭe, kiam la sumo de la divizoroj, sen la nombron mem, estas pli malgranda ol la nombro mem, tiu nombro konsideratas manka. Ekz. 8, havas divizorojn 1, 2, 4 sen 8 mem. La sumo $1 + 2 + 4 = 7 < 8$

- **Amikaj nombroj**

Nomiĝas tiel tiuj du nombroj kiam la divizoroj de unu el ili sen ĝin mem havas sumon tiom kiom la alia nombro mem. Ekz. 220 kaj 284.

Ĉar la divizoroj de 220 estas: 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110, donantaj sumon 284 kaj inverse,

la divizoroj de 284 estas: 1; 2; 4; 71; 142; donantaj kiel sumon ĝuste 220.

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 40 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 143 = 220$$

Aŭ 17296 kaj 18416, malkovrite de **Ibn al Banni** (1256 - 1321)

Ekzistas regulo de **Ibn Kurra** (836 - 901)

Jen aliaj nombroj:

9363 584 kaj 9 437 056 (Rene Dekart, 1596 - 1660)

Leonard Euler (1707 - 1783) malkovris 59 parojn de amikaj nombroj.

$3^2 * 7 * 13 * 107$ kaj $34 * 5 * 11 * 2699$
(87683 kaj 5047130)

Hodiaŭ konatas 1200 paroj de amikaj nombroj.

Aliaj tiaj nombroj estas 18416 kaj 17296; 9437056 kaj 93635554, ka.
Provu mem!

La ĝenerala regulo

Por trovi parajn amikojn ekzistas ĉi tiu ĝenerala regulo:

$$A = 2^n a \text{ dhe } B = 2^n bc$$

kie

$$A = (2^k + 1)^2 * 2^{2n - k} - 1$$

$$B = 2^n - 1 + 2^{n - k}$$

kaj

$$C = 2^n - 1 + 2^{n - k}$$



Norbert Vinner, unu el la fondintoj de kibernetiko

- **Poligonaj nombroj**

Dividiĝas en

- **Triangulaj nombroj**

1; 3; 6; 10; 15; 21; 28,

Ĉi tie la diferenco de unu al la alia pliiĝas je unu (vidu)

Por obteni ĉi nombrojn ni prenas la serion: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;

Ni notas la nombron 1, poste adicias $1 + 2 = 3$ kaj notas 3, poste adicias $1 + 2 + 3 = 6$ kaj notas 6, poste adicias $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ kaj notas 10 kaj tiel plu.

Ĉi nombroj povas enviciĝi ankaŭ en la suba triangulo:

			1				
			1				
		1		2		1	
	1		3		3		1
1		4		6		4	
							1

La piramido povas kompletiĝu similmaniere. Rimarku ke en ĉi triangulo, konata kiel “Triangulo de Paskalo” ĉiu nombro egalas al la sumo de du nombroj, sur la antaŭa vico apud ĝi. La vicoj de ĉi tiu triangulo servas kiel koeficientoj de la elvolviĝo de “Binomo de Njutono” $(a + b)^n$.



- **Kvadrataj nombroj**

1; 4; 9; 16; 25;

Ĉi nombroj akireblas konsiderante unue la serion de la neparaj nombroj:

1; 3; 5; 7; 9; kaj adiciante laŭvice la unuan nombron, la unuan kaj la duan nombron, la unan , la duan kaj la trian nombron, kaj tiel plu (vidu).

- **Kvinangulaj nombroj**

1; 5; 12; 22; 35;

Tiucele ni devas prikonsideri la serion: 1; 4; 7; 10; 13;



Alfred Whitehead (1861 - 1947), angla matematikisto kaj filozofo

- **Sesangulaj nombroj**

1; 6; 15; 28; 45;

Tiucele ni priksideru la serion: 1; 5; 9; 13; 17;



Norbert Vinner

- **Sepangulaj nombroj**

1; 7; 18; 34; 55; . . .

Tiucele ni priksideru la serion: 1; 6; 11; 16; 21; . . .

- **Okangulaj nombroj**

1; 8; 2; 40; 65; . . .

Tiucele ni priksideru la serion: 1; 7; 13; 19; 25; . . .

Kelkaj rapidaj multiplikoj

- **Multiplikado kaj divido per 5**

Ni povas dividi per 2 kaj multipliku per 10 ĉar $5a = 10 \cdot a / 2$

Samtiel, ni povas multipliku per 2 kaj dividu per 10, ekz.

$$1275 \cdot 5 = 6375 \quad 5 \cdot 10 = 6375$$

$$1275 : 5 = 255 \quad 2250 : 10 = 255$$

- **Multipliko kaj divido per potencoj de 5**

Ĉar $25 = 100 : 4$, ni multipliku per 100 kaj dividu per 4
Inverse, ni dividu per 100 kaj multipliku per 4

$$786 * 25 = 78600 : 4 = 19650$$

$$786 : 25 = 4 * 7.86 = 31.44$$

$$786 * 125 = 786000 : 8 = 98250$$

$$786 : 125 = 8 * 0.786 = 6.288$$

- **Multipliko de duciferaj nombroj apud 100**

$$93 * 98 = (93 - 2) * 100 + 2 * 7 = 9114$$

Kial tiel? Jen kial:

$(100 - a)(100 - b) = (100 - a) * 100 - 100b + ab = 100[(100 - a) - b] + ab$
kie a kaj b estas la komplementoj de du nombroj ĝis 100.

- **Multipliko de nombroj je tipo 62*68**

(atentu: ambaŭ unuoj sumas 10, $2 + 8$, dum la ceteraj ciferoj estas identaj, 6 kaj 6)

$$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ac + 10ba + bc = 100a^2 + 10a(b + c) + bc \\ = 100a^2 + 100a + bc = 100a(a + 1) + bc$$

$$\text{Tiam } 62 * 68 = 6 * 7 * 100 + 2 * 8 = 4216$$

La kriterioj de dividebleco de la nombroj

Ofte estas necese antaŭscii ĉu iu natura nombro divideblas aŭ ne per alia donita nombro natura. Ekzistas kelkaj teoremoj tiucele.

- **Dividebleco per 2**

La nombro devas finiĝi per para nombro aŭ nul (ekz. 16, 230)



Benoit Mandelbrot (naskiĝis je 1924)

- **Dividebleco per 3**

La nombro devas havi la sumon de la ciferoj dividebla per 3 (ekz. 162, 711)



John Neumann (1903 - 1957)

- **Dividebleco per 4**

La nombro devas havi du lastajn ciferojn aŭ nul aŭ nombron dividebla per 4 (ekz. 200, 224)

- **Dividebleco per 5**

La nombro devas finiĝi per nul aŭ 5 (ekz 340, 345)

- **Dividebleco per 6**

La nombro devas dividiĝi samtempe per 2 kaj 3 (ekz. 126)

- **Dividebleco per 8**

La nombro devas havi la tri lastajn ciferojn aŭ ĉiujn nuloj aŭ formantajn nombron dividebla per 8 (ekz. 125000, 111120)

- **Dividebleco per 11**

La nombro devas havi la sumon de la ciferoj sur la neparaj pozicioj egala al la sumo de la ciferoj sur la paraj pozicioj, aŭ formantaj diferencon dividebla per 11 (ekz. 103785, ĉar $1 + 3 = 8 = 0 + 7 + 5$);
9163627 ĉar $9 + 6 + 6 + 7 = 28$; $1 + 3 + 2 = 6$; la diferenco $28 - 6 = 22$ kaj 22 divideblas per 11.



Alan Turing (1912 - 1954), unu el la unuaj kibenetikistoj

- **Dividebleco per 99, 33, 11**

Se la sumo de duciferaj nombroj, formiĝantaj per la ciferoj de la donita nombro de dekstre al maldekstre divideblas per 99, 33, 11.

Ekz. 2037354

Ĉi tie

$$54 + 73 + 03 + 2 = 132$$

$132 : 11$ kaj $132 : 33$ rezultiĝas entjero.

Samtiel, 6918021

$$21 + 80 + 91 + 6 = 198$$

198 divideblas per 11, 33, 99

- **Dividebleco per 101**

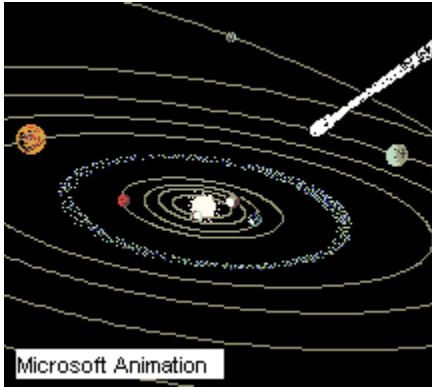
Se la diferenco inter la sumo de duciferaj nombroj sur neparaj pozicioj de dekstre kaj sumo de ĉi nombroj sur paraj pozicioj dekstre estas nul aŭ multoblo de 101. Ekz.

268405783

$$83 + 40 + 2 = 125$$

$$57 + 68 = 125$$

$$125 - 125 = 0 \text{ Tiam } 268405783 : 101 = 2657483$$



La suna sistemo

- **Dividebleco per 999; 333; 111; 37; 27**

Se la sumo de 3 unuaj ciferoj de ĉi nombro de dekstre egalos al la sumo de 3 sekvantaj ciferoj kaj estas multoblo de 999; aŭ 333; aŭ 111; aŭ 37; aŭ 27.

Ekz. 776223

$$\text{Ni havas } 223 + 776 = 999$$

$$999 : 999 = 1; 999 : 333 = 3; 333 : 111 = 3; 999 : 111 = 9; 999 : 37 = 27; 999 : 27 = 37$$

Kriterio de Paskalo

Por difini la kriterion de la dividebleco per m , de kiu ajn natura nombro, ni trovu unue la restojn de la divido de $m_1, m_2, m_3, \dots$ de la divido de m per $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ respektive. Por ĉiu nombro

$$n = n_k \dots n_3 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot n_0 = n_0 + 10 n_1 + 10^2 n_2 + \dots + 10^k n_k$$

ni difinu la nombron

$$f_m(n) = n_0 + m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_k n_k$$

Pruveblas ke la nombroj n kaj $f_m(n)$ havas la samajn restojn de la divido per m kaj povas dividiĝi per m nur samtempe. Pruvu ke la restoj trovitaj m_{k+1} por $k = 1, 2, 3, \dots$ povas estiĝi pli simple se ni rimarkas ke ĝi egalas al la resto de la divido de m per la nombro $10m_k$ (anstataŭ la nombro 10^{k+1}).

Pruviĝo

Ni supozu ke $q_1, q_2, q_3, \dots$ estas la kvocienoj de la divido per m de nombroj $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ respektive kun restoj $m_1, m_2, m_3, \dots$. Tiam veras

$$N = n_0 + 10n_1 + 10^2n_2 + 10^3n_3 + \dots + 10^kn_k = n_0 + (q_1m + m_1)n_1 + (q_2m + m_2)n_2 + \dots + (q_km + m_k)n_k = n_0 + m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_kn_k + (q_1n_1 + q_2n_2 + \dots + q_kn_k)m$$

De ĉi tie sekvas ke la nombroj n kaj $f_m(n) = n_0 + m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_kn_k$ donas samajn restojn dum la divido per m , krome se ni elkalkulas laŭvice la restojn $m_1, m_2, \dots$ ni trovos la reston m_k , tio estas, la resto el la divido per m de la nombro

$$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k = 10(q_km + 10m_k) = 10q_km + 10m_k$$

egalas al la resto el la divido per m de la adicianto $10m_k$ en la lasta sumo.

Kelkaj nombro - sumoj

Ofte estas necese ekscii sumojn de kelkaj specialaj serioj de naturaj nombroj kiel sube. Jen la formuloj por ili:

- **La sumo de la neparaj nombroj**

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

- **La sumo de paraj nombroj**

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

- **La sumo de la kvadratoj de la naturaj nombroj**

$$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = (2n + 1)(n + 1)n/6$$

- **La sumo de la kubo de la naturaj nombroj**

$$1 + 8 + 27 + 81 + \dots + n^3 = [n(n + 1)/2]^2$$

- **La sumo de la kvaraj potencoj**

$$1 + 16 + 81 + \dots + n^4 = 1/30*(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

- **La sumo de la kvinaj potencoj**

$$1 + 32 + 243 + \dots + n^5 = 1/12*(6n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)$$

- **La sumo de la sesaj potencoj**

$$1 + 64 + 729 + \dots + n^6 = 1/42*(96n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n)$$

- **La sumo de la sepaj potencoj**

$$1 + 128 + 2187 + \dots + n^7 = 1/24*(3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2)$$

- **La sumo de la okaj potencoj**

$$1 + 256 + 6561 + \dots + n^8 = 1/360*(40n^9 + 180n^8 + 240n^7 + 80n^3 - 12n)$$

- **La sumo de la naŭaj potencoj**

$$1 + 512 + 19683 + \dots + n^9 = 1/180*(18n^{10} + 90n^9 + 135n^8 - 126n^6 + 90n^4 - 27n^2)$$

- **La sumo de la dekaj potencoj**

$$1 + 1024 + 59049 + \dots + n^{10} = 1/66*(6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n)$$

- **La sumo de la dekunuaj potencoj**

$$1 + 2048 + 177147 + \dots + n^{11} = 1/24*(2n^{12} + 12n^{11} + 22n^{10} - 33n^8 + 44n^6 - 33n^4 + 10n^2)$$

- **La sumo de la dekduaj potencoj**

$$1 + 4096 + 531441 + \dots + n^{12} = 1/2730*(210n^{13} + 1365n^{12} + 2730n^{11} - 5005n^9 + 8580n^7 - 9009n^5 + 4550n^3 - 691n)$$

La malgrandiĝo de la nombroj

Kiuj nombroj malgrandiĝas dekfoje se ni demetas ilian lastan ciferon? Kaj dekunu foje?

Respondo

10 foje malgrandiĝas la nombroj finiĝantaj per nul. Kaj pli da fojoj? Ni rezonu kiel jene:

Ni supozu ke ili malgrandiĝas $(10 + a)$ fojojn.

Ni notu per y la nombron de la dekoj, per z la nombron de la unuoj. Tiam la nekonata nombro $x = 10y + z$.

Kiam ni demetas z , x fariĝas $(10 + a)$ fojojn malpli granda, do $x = (10 + a)y$

Ni havas

$10y + z = (10 + a)y$ de kie rezultiĝas $z = ay$.

Sed $z < 10$, $y < 10$, $a < 10$.

$10 + a$ ne transpasas 19. Tiam:

Se ni esploru nur duciferulojn:

11 fojojn malgrandiĝas 11; 22; 33; ...

12 fojojn malgrandiĝos 12; 24; 36. ...

13 fojojn malgrandiĝos 13; 26; 39; ...

14 fojojn malgrandiĝos 14; 28; ...

15 fojojn malgrandiĝos 15;

16 fojojn malgrandiĝos 16; ...

17 fojojn malgrandiĝos 17;

• La kvadrato de la entjero finiĝanta per kvar identaj ciferoj

La kvadrato de entjero finiĝas per kvar identaj ciferoj. Kiu estas tiu cifero?

Solvo

La kvadratoj de la entjeroj finiĝas per la ciferoj 0, aŭ 1, aŭ 4, aŭ 9, aŭ 6, aŭ 5. Kvadrato de para nombro dividiĝas per 4, dum la kvadrato de nepara nombro dividite per 4 donas reston 1 (kontrolu)

$$(2k)^2 = 4k^2$$

$$(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Do, la kvadrato de nombro ne povas finiĝi per 11, 99, 66, 55 , ĉar alie dividite per 4, donus la reston 3, 3, 2 kaj 3.

Ni rigardu nun kian reston donas la kvadrato dividite per 16.

La entjeroj povas prezentiĝi kiel $8k$, $8k \pm 1$, $8k \pm 2$, $8k \pm 3$, $8k \pm 4$.

Ili havas la aspekton

$16(4k^2)$, $16(4k^2 \pm k) + 1$, $16(4k^2 \pm 2k) + 4$, $16(4k^2 \pm 3k) + 9$ kaj $16(4k^2 + 4k + 1)$

Do ĝi aŭ dividiĝas per 16 aŭ dum la divido per 16 donas reston 1, 4 aŭ 9.

La nombro finiĝanta per 4 identaj ciferoj 4444 dum la divido per 16 donas reston 12, sed ne povas esti komplementa kvadrato.

Do ĝi, se finiĝus per kvar identaj ciferoj, tiu cifero estus nulo. Rezultiĝas la nombro $100^2 = 10000$

- **Kvadrato de la nombro kun tri identaj ciferoj**

Ĉu eblas ke la kvadrato de entjero finiĝu per tri identaj ciferoj, diversaj al nulo?

Solvo

La kvadrato de ĉiu entjero nepre finiĝas per unu el ĉi tiuj ciferoj: 0; 1; 4; 5; 6; aŭ 9.

Krome, la kvadrato de entjero aŭ estas multoblo de 4 (se la inica nombro estas para) aŭ estas multoblo de 4 plus 1 (se la inica nombro estas nepara)

Sed la nombroj finiĝantaj per 11, 55, 66 aŭ 99 ne estas multobloj de 4 kaj ili donas reston 3; 3; 2; aŭ 3 denove dum la divido per 4, tial ili ne povas esti komplementaj kvadratoj.

Ni esploru la kazon de la nombroj finiĝantaj per 44, aŭ pli precize per 444. Pruviĝas facile ke tamen 444 mem ne estas komplementa kvadrato, la nombro 1444 estas ja tia ĉar ĝi egalas al 38^2 .

Sekve, la komplementa nombro, kies kvadrato finiĝas per tri identaj ciferoj, diversaj al nulo, ekzistas. Povas ekzisti ankaŭ aliaj nombroj diversaj al tiu montritaj ĉi supre.

- **Trovu la lastan ciferon**

Trovu la lastan ciferon de 9^{9^9} ! Kaj de 2^{3^4} ?

Solvo

Ni notu $9^{2n} = (81)^{2n} = 81 \cdot 81 \cdot \dots \cdot 81$ n fojojn, kompreneble finiĝanta per la cifero 1.

$9^{2n+1} = 9 \cdot 9^{2n} = 9 \cdot 81^n$ finiĝas per cifero 9.

6^n finiĝas per 6

Tiam $6^{n+1} = 6 \cdot 6^n$ finiĝas per 6

16^n finiĝas per la sama cifero kiel 6^n

Samtiel, ĉiu dua potenco multobla de 4 finiĝas per 6 ĉar $2^{4n} = 16^n$

$3^4 - 1$ divideblas per $(3 + 1) = 4$ Tio rezultigas $2^{3^4-1} 2^{3^4-1}$ finiĝanta per 6

Sed $2^{3^4} = 2 \cdot 2^{3^4-1}$ $2^{3^4} = 2 \cdot 2^{3^4-1}$ finiĝas per 2 ($2 \cdot 6 = 12$)

- **Duobligo de la nombro**

Nombro finiĝanta per la cifero 2, kiam ĉi cifero transpasas en la unuan lokon, ĝi duobligas tiun nombron. Kiu estas ĝi?

Solvo

Ni notu la nombron donitan tiel

abcde. . . f2

kaj la ŝanĝitan nombron

2abcde. . . f

Ĉar la lasta cifero estas 2, tiam la antaŭlasta devas esti 4, ĉar kiam multiplikite 2 per 2 donas 4. La ceteraj ciferoj estos respektive 8, 6, 3, ka. Ĉar la ciferoj multiplikiĝas laŭvice per 2. .

Tiam la serĉata nombro estos

105263157894736842

- **Kaj se la lasta cifero estus 3 kaj ni havus la trioblon?**

Solvo

1034482758620689655172413793

- **Kaj se la nombro estu sesciferaj kaj komenciĝas per 1 kaj transpasiginte ĝin en la finon ni ricevus nombron trioble granda?**

Solvo

Ni notu la nombron

1abcde

Se ni multiplikos per 3

abcde1

Do, $3 \cdot e$ devas finiĝi per 1, tio rezultigas $e = 7$

Do, nunpornun ni havas

1abcd7 $\cdot 3 =$ abcd71

Tiam $d \cdot 3$ finiĝas per 5 kio rezultigas $d = 5$

Respondo: la nombro estas 142857

Nun ni ĝeneraligu la problemon

- *Entjero malgrandiĝas je entjera nombro da fojoj kiam oni forviŝas ties lastan ciferon. Trovu ĉiujn tiajn nombrojn.*

Solvo

Ĉiuj nombroj finiĝantaj per nul malgrandiĝas dek fojojn:

Ĉiuj duciferaj nombroj

11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99;

12; 24; 36; 48;

13; 26; 39;

14; 28;

15;

16

17;

18;

19;

- *Trovu ĉiujn entjerojn komenciĝantaj per la cifero 6 kaj malgrandiĝantaj 25 fojojn kiam oni forviŝas ĉi ciferon.*

Solvo

6250. . . . 0 por $n = 0; 1; 2; \dots$

- *Provu ke ne ekzistas entjero malgrandiĝanta 35 fojojn kiam oni forviŝas ties unuan ciferon.*

Solvo

Ni supozu ke la nombro komenciĝas per cifero a kaj malgrandiĝas 35 fojojn kiam oni forviŝas la ciferon a. Daŭrigu.

- *Entjero malgrandiĝas 9 fojojn kiam unu el ties ciferoj forviŝiĝas kaj la rezultato dividiĝas per 9.*

Provu ke por dividi la rezultiĝintan nombron per 9 sufiĉas same ke oni forviŝu unu el ties ciferojn.

Trovu ĉiujn entjerojn kontentigantaj la kondiĉon de la problemo.

Solvo

Ni provu unue la helpaserton: la nombro malgrandiĝas 9 fojojn kiam oni forviŝas la duan nul ciferon (de dekstre)

101252025; 30375; 405; 50625; 6075; 70875;

Je la fino de ĉiu el ĉi tiuj nombroj oni povas aldoni arbitrecan nombron da nuloj.

- *Trovu ĉiujn entjerojn malgrandiĝantaj:*

Je entjera nombro da fojoj kiam oni forviŝas ties duan ciferon.

Je entjera nombro da fojoj kiam oni forviŝas ties trian ciferon.

Trovu ĉiujn entjerojn malgrandiĝantaj je entjera nombro da fojoj kiam oni forviŝas ties duan ciferon.

Solvo

Estas ja nombroj ĉe kiuj ĉiuj ciferoj escepte de du unuaj estas nuloj.

Serĉu aparte la kazojn kiam la unua cifero de la serĉata nombro estas 1, 2, 3, 9. Estas entute 104 diversaj nombroj kontentigantaj la kondiĉon de la ekzerco, je kies fino oni povas aldoni senlimigite nulojn.

- *Trovu la malpli grandan entjeron komenciĝanta per la cifero 1 kaj kreskiĝanta tri fojojn kiam ĉi cifero iras al la fino de la nombro.*

Trovu ĉiujn nombrojn kiuj ĝuas ĉi econ.

Kiaj ciferoj povas stari je komenciĝo de la entjeroj kreskiĝantaj 3 fojojn kiam ĉi ciferoj iras al la fino? Trovu ĉiujn tiajn nombrojn.

Solvo

La malpli granda nombro eble estas 142 857

La cifero 1 kaj la cifero 2. La malpli granda nombro kun inica cifero 2 estas 285 714

- *Trovu la naturan nombron malpligrandan kies lasta cifero estas 6 kaj kreskiĝanta 4 fojojn kiam ĉi lasta cifero iras al la komenciĝo de la nombro.*

Solvo

153 846

- *Provu ke ne ekzistas entjeroj kreskiĝantaj 5 aŭ 6 aŭ 8 fojojn kiam la inicaĵ iliaj ciferoj iras al la fino de la nombroj.*

Solvo

Uzu la econ ke la divideblaj nombroj per 5 devas finiĝi per 0 kaj 5, dum tiuj divideblaj per 6 aŭ 8 devas finiĝi per para nombro.

- *Trovu la malpligrandan nombron kun inica cifero 7 malgrandiĝanta 3 fojojn kiam ĉi cifero iras al la fino de la nombro. Trovu ĉiujn tiajn nombrojn.*

Solvo

La malpligranda nombro kontentiganta ĉi kondiĉon estas 7241379310344827586706896551

Provu ke entjero ne povas esti 2, 3, 4, 5, 6, 7 aŭ 8 fojojn malpli granda ol la ties reversio, tio estas ke la nombro konsistas el samaj ciferoj skribitaj laŭ inversa vicordiĝo. Trovu ĉiujn pozitivajn entjerojn kiuj estas 4 aŭ 9 fojojn malpli grandaj ol iliaj reversioj.

Solvo

Entjero kiu estas 5, 6, 8, aŭ 7 fojojn malpli granda ol ties reverso devas komenciĝi per 1, ke nombro kiu devas esti 2 fojojn aŭ tri fojojn malpli granda ol ties reversio devas komenciĝi per la ciferoj 1, 2, 3, 4, aŭ 1, 2, 3 respektive.

La nombroj kiuj estas 4 fojojn malpli grandaj ol iliaj reversioj estas:

0; 2178; 21978; 219978; 2199978, same la nombroj kiuj en sia decimala prezentiĝo de formo $P_1P_2P_2 \dots P_{n-1}P_nP_{n-1} \dots P_2P_1$ ku P_i – estas kelkaj nombroj apartenantaj al la ĉi supra nombrovico.

Kiu pli grandas

- *Kio pli grandas: $99^n + 100^n$ aŭ 101^n kie n estas natura nombro?*

Solvo

Ni prenu

$$\begin{aligned} (101^n - 99^n) / 100^n &= [(100 + 1)^n - (100 - 1)^n] / 100^n = [2 \\ &(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i C_n^1 100^{n-1} + C_n^3 100^{n-3} + \dots)] / 100^n = 2[n/100 + n(n \\ &- 1)(n - 2) / (3! 100^3)] > 1 \text{ por } n \geq 50 \end{aligned}$$

Ankaŭ por $n = 49$ del > 1

Dum por $n = 48$ del < 1

Respondo: por $n \geq 48$ pli grandas la unua, por n pli ol 48, la dua.

- *Kio pli grandas: 31^{11} aŭ 17^{14} ?*
- *Kio pli grandas: $2^{2^{2^{\dots 2}}}$ kie supozeble estas 1001 duoj aŭ $3^{3^{3^{\dots 3}}}$ kie supozeble estas mil triojoj?*
- *Kio pli grandas: $3^{3^{3^{\dots 3}}}$ kun mil triojoj aŭ $4^{4^{4^{\dots 4}}}$ kun 999 kvaroj?*
- *Kio pli grandas: 1000^{1000} aŭ 1001^{999} ?*
- *Kio pli grandas: $(1.000\,001)^{1\,000\,000}$ aŭ 2 ?*
- **Tago aŭ nokto?**

Se hodiaŭ tagmeze estas sunolumo, ĉu estos tia ankaŭ post 60 horoj?

Solvo

60 horoj estas $2 \cdot 24 + 12$. Tiam post 60 horoj koincidos ĝuste noktomezo!

- **Kio pli grandas**

Kio pli grandas: la nombro indikanta la cirkonferencon aŭ tiu de la surfaco de la cirklo?

Solvo

Ni rememoru la formulojn: $P = 2\pi R$ kaj $S = \pi R^2$

Ni trovi ilian diferencon: $\pi (R^2 - 2R) = \pi R (R - 2)$.

Nun ni pristudu la signon. Ekster du radikoj 0 kaj 2 estas la signo plus, ene de ili la signo minus.

Do por $0 < R < 2$ la cirkonferenco pligrandas ol la surfaco, inverse la surfaco pligrandas ol cirkonferenco. Ekz. por $R = 3$ ni havas $P = \pi \cdot 6$ dum $S = \pi \cdot 9$ kie $S > P$

Por $R = 1$ ni havas $P = \pi \cdot 2$ dum $S = \pi \cdot 1$, tio estas $P > S$

- **La poŝoj**

Se el la dekstra poŝo mi enmentas en la maldekstran tiom da mono kiom havas aktuale la maldekstra, tiam ĉe la dekstra poŝo restos kiel ajn 30 Lekoj pli ol ĉe la maldekstra. Kiom da Lekoj havis dekomence ĉiu poŝo?

Solvo

x L havas la maldekstra kaj y L la dekstra poŝo.

Nun ni formu la ekvaciojn:

$$x + x + 30 = y - x \text{ donas}$$

$$3x + 30 = y$$

x kaj y estas naturaj nombroj. Plue $x < y$, laŭ la donitaĵoj. Kiel vidite, y rezultiĝas multoblo de 3. Por $x = 1; 2; 3$; ka. Ni ricevos la valorojn por y , $y = 33; 36; 39; \dots$

La batetoj de la horloĝo

Du murhorloĝoj startas bateti samtempe, kaj ankaŭ haltas samtempe. Unu el ili batetas ĉiun duan sekundon dum la alia ĉiun trian sekundon. Oni nombris 13 batetojn prikonsiderante tiajn nur la koincidajn batetojn. Kiom da sekundoj estas pasintaj ekde la unua ĝis la lasta bateto?

Solvo

La malplej granda komuna multoblo de $(2, 3) = 6$

Do ĉiun sesan bateton unu koincidas. Ni havas 13 tiajn, tiam ekde la unua ĝis la lasta bateto pasis $12 \cdot 6 = 72$ sekundoj.

Vidu la skizon:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13										

Estas entute 12 intervaloj korespondantaj al 12 sesoj. . .

• Lernanto

Iu lernanto trairis 1 km de sia hejmo al la lernejo dum kvinono de horo. La vojo longis 2.5 km. Li devus atingi la lernejon dum 25 minutoj. Je kia rapideco li devus plumarŝi nun tiucele?



Solvo

La unua tempo rezultiĝas $1.5 = 0.2$ horoj.

Li povas atingi la celon se $25/60 - 0.2 = 5/12 - 0.2 = 1.5/x$

Kie per x estas notita la serĉata rapideco.

Ni solvu ĉi ekvacion

$$5/12 - 1/5 = 1.5/x$$

$$25x - 12x = 90$$

$$13x = 90$$

$$x = 90 / 13 = \text{proksimume } 7 \text{ km/horo}$$

- **La hormontriloj konkuras. .**

Kiomfoje dum 24 horoj la minuta montrilo transpasas tiun de la horoj?

Solvo

La rapideco de la minuta montrilo estas 12 foje pli granda ol tiu de la horoj. Ene de 24 horoj ĝi transpasas tion 23 fojojn.

- **Kiom da nuloj**

Kiom da nuloj estas ĉe la fino de la produkto 1. 2. 3. 24. 25 ?

Solvo

Ni povas regroupigi la faktorojn de ĉi nombro tiamaniere:

$$1*2*3*2^2*5*(2*3)*7*2^3*3^2*(2*5)*11*(2^2*3)*13*(2*7)*(3*5)*2^4*17*(2*3)*19*(2^2*5)*(3*7)*(2*11)*23*(2^3*3)*5^2 =$$

Nul formiĝas per la multiplikado de 2 kun 5. Ni apartigu ilin flanken:

$$1*3*3*7*3^2 * 11*3*13*7*3*17*3^2 * 19*7*11*23*3 *(2*2^2 * 5*2*2^3 * 2*5*2^2 * 2*5*2^4 * 2*2^2*5*2*2^3*5^2) =$$

Ene de krampoj ni havas entute $2^{22}*5^6$ Do ni havas 6 paroj da produktoj $2*5$, aŭ 6 nuloj ĉe la fino.

- **La speciala numero**

Ni havas la numeron 127 334 kie la tri unuaj ciferoj kaj tri duaj ciferoj sumas 10. Montru la pli proksiman grandan nombron kiu ĝuas ĉi econ.

Solvo

127 343

- **Du specialaj numeroj**

Du nombroj donas la saman rezulton 24 kiam oni multiplikas aŭ kiam oni dividas ilin. Kiuj estas ili?

Solvo

Estas la ekvacioj $xy = x/y = 24$ Krome kompreneblas ke ambaŭ nombroj estas ja pozitivaj je sama signo.

$x = 24/y$ rezultigas $24/y^2 = 24$ aŭ $y^2 = 1$ aŭ $y = \pm 1$ kiu donas $x = \pm 24$.

Respondo: la serĉataj nombroj estas 24 kaj 1 aŭ (- 24) dhe (- 1)

- **Alia speciala nombro**

Montru du nombrojn kies sumo, produkto kaj kvociento samas!

Respondo: Ni notu per x kaj y tiujn nombrojn. Tiam ili kontentigus la kondiĉojn:

$x + y = xy = x/y$ kiuj donas tri ekvaciojn:

$$x + y = xy \quad y - xy = -x \quad y(1 - x) = -x \quad y = -x/(1 - x) \quad y = x/(x - 1)$$

$$x + y = x/y \quad y - x/y = -x \quad y^2 - x = -xyy^2 + xy - x = 0 \quad y = [-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}]/2$$

Nun ni egaligu la esprimaĵojn kiuj donas y kaj ricevos:

$$x/(x - 1) = [-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}] / 2$$

Solvinte ĉi ekvacion de la dua potenco rilate x

$$2x = (x - 1) [-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}]$$

$$2x = -x^2 + x \pm (x - 1) \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$x + x^2 = \pm (x - 1) \sqrt{x^2 + 4x}$$

Ni kvadratigu

$$(x + x^2)^2 = (x - 1)^2 (x^2 + 4x)$$

$$x^2 + 2x^3 + x^4 = (x^2 - 2x + 1) (x^2 + 4x)$$

$$x^2 + 2x^3 + x^4 = x^4 + 4x^3 - 2x^3 - 8x^2 + x^2 + 4x$$

Ni reduktigu x^4 kaj x^3

$$8x^2 - 4x = 0$$

Aŭ $4x(2x - 1) = 0$ aŭ $x = 0$ dhe $x = 1/2$

Por $x = 0$ rezultiĝas ankaŭ $y = 0$ kio malakcepteblas ĉar ni ne rajtasa dividi per nul.

Por $x = 1/2$ ni havas $y = 1/2 / (1/2 - 1) = -1$

Tiam la nombroj estas $1/2$ kaj -1 . Provu!

- **Kiu sumo pli grandas?**

Ni prikonsideru la parajn nombrojn de 1 - 100 kaj la neparajn nombrojn de 1 - 100. Ni adiciu ili separate. Kiu sumo pli grandas?

Solvo

Konforme al la formulo pri la aritmetika progresio ni havas

$$S_1 = (2 + 100) \cdot 50 / 2 = 102 \cdot 25 = 2550$$

$$S_2 = (1 + 99) \cdot 50 / 2 = 100 \cdot 25 = 2500$$

Do pligrandas la sumo de la paraj nombroj.

- **Montru la lastan ciferon!**

Ni substrahu de 1. 2. 3. . . . 18. 19 - 1. 3. 5. . . 17. 19. Montru la lastan ciferon de ĉi diferenco.

Solvo

La unua nombro finiĝas per la cifero nul ĉar ĝi havas kiel faktorojn 2 kaj 5. Dum la dua nombro finiĝas per la cifero 5. Tiam la diferenco finiĝas per la cifero 5.

La kinejo

- *En iu kinejo la nombro de la vicoj kaj de la seĝoj en ĉiu vico samas. Oni aldonis 5 vicojn kaj malpliigis la nombron de la seĝoj en ĉiu vico tiamaniere ke la ĝenerala nombro de la seĝoj restis la sama. Kiom da seĝoj estas en la kinejo?*

-



Solvo

Ni havis x vicoj kaj x seĝoj en ĉiu vico.

Nun estas $(x + 5)$ vicoj kaj $(x - a)$ seĝoj en ĉiu vico

Ni formu la ekvacion

$$x^2 = (x - a)(x + 5)$$

$$\text{Aŭ } x^2 = x^2 + 5x - ax - 5a$$

$$\text{Aŭ } x(5 - a) = 5a$$

$$\text{Aŭ } x = 5a / (5 - a)$$

Ni provu per diversaj valoroj de a , kompreneble naturaj nombroj. < 5 .

Por $a = 1$ rezultiĝas $x = 5/4$ malakcepteblas

Por $a = 2$ rezultiĝas $x = 10/3$ malakcepteblas

Por $a = 3$ rezultiĝas $x = 15/2$ malakcepteblas

Por $a = 4$ rezultiĝas $x = 20/1$ akcepteblas.

Tiam en la kinejo estas $20^2 = 400$ seĝoj

- **Je kia cifero ĝi finiĝas**

Je kia cifero finiĝas la produkto de 222 duoj?

Je kia cifero finiĝas la produkto de 100 triojoj?

- **Divenu la nombron**

Entjero estas sepfoje pli granda ol la cifero de ties unuoj. Kiu estas ĝi?

Solvo

La cifero de la unuoj varias de 1 ĝis 9 (ni ekskludas nulon ĉikaze)

$$10a + b = 7b$$

$$10a = 6b$$

$$a = 0.6b$$

Kompreneble a estas natura nombro.

Do $a = \frac{3}{5} * b$. **b** devas esti multoblo de 5. La sola nombro kontentiganta ĉi kondiĉon estas mem 5. Do $a = \frac{3}{5} * 5 = 3$ kaj $ab = 35$.

Respondo: 35

- **La pitagorecaj triopoj**

Estas ja sciite ke $3^2 + 4^2 = 5^2$ Jen alia triopo $5^2 + 12^2 = 13^2$

Ĉu vi povas trovi pliajn dekojn da trioj tiaj?

Solvo

Ni utiligu la formulojn:

$$x = a^2 - b^2$$

$$y = 2ab$$

$$z = a^2 + b^2$$

Envere: $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ Provu!

Ekz. $a = 2$; $b = 1$ rezultigas

$$x = 4 - 1 = 3; y = 2*2*1 = 4; z = 4 + 1 = 5$$

$a = 7$; $b = 5$ rezultigas

$$x = 49 - 25 = 24; y = 2*7*5 = 70; z = 49 + 25 = 74 \text{ ka.} \quad \text{Provu!}$$

Aparte

- **La dek unuaj pitagorecaj triopoj**

Trovu la dek unuajn pitagoriecajn triopojn kontentigantaj la kondiĉon $x < y < z < 30$

Solvo

El malegalaĵo $z < 30$ kaj la formuloj

$$x = 2mnk; y = (m^2 - n^2)k; z = (m^2 + n^2)k$$

ni obtenas ke $m^2 < 30$ tio estas $m \leq 5$.

Ni surmetu $m = 2$; $n = 1$ kaj $k = 1, 2, 3, 4, 5$ kaj prikonsideru la triopojn
3, 4, 5; 6, 8, 10; 9, 12, 15; 12, 16, 18; 15, 20, 25.

Surmetante $m = 3$ kaj $n = 2$ samkiel $k = 1, 2$ ni obtenas 5, 12, 13; 10, 24, 25.

Surmetante $m = 4$ kaj $n = 1$ kaj $k = 1$ ni obtenas 8, 15, 17; 7, 24, 25.

Fine, surmetante $m = 5$ kaj $n = 2$ kaj $k = 1$ ni obtenas 20, 21, 29.

La nepra kondiĉo por la solvo

Ni supozu a, b, c , entjeroj ne nuloj. Provu ke se c ne divideblas per la plej granda komuna divizoro de a kaj b , tiam la ekvacio $ax + by = c$ ne havas solvon.

Pruvo

Ni notu per $d =$ plej grandan komunan divizoron de (a, b) . Se la ekvacio $ax + by = c$ havus solvon je entjeroj $x = x_0$ kaj $y = y_0$, tiam estus vera ankaŭ la egalajo $ax_0 + by_0 = c$. Ĉi tie la maldekstra flanko divideblas per d (ĉar a kaj b , konforme al la supozo estas multobloj de d). Sed la dekstra flanko c ne divideblas per d . Ĉi kontraŭdirajo pravas nian aserton.

Problemoj aliaj kun rektaj kaj malrektaj dependecoj ks.

- **La araneoj kaj la muŝoj**

Se 5 araneoj forkaptas 5 muŝojn dum 5 minutoj, ĉu povas diri kiom da araneoj forkaptus 100 muŝojn dum 100 minutoj?



Solvo

Ni havas

$$\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 5 \\ \times & 100 & 100 \end{array}$$

Nun ni apliku la formulon pri rektaj kaj malrektaj dependecoj, prikonsiderante ke:

La nombro de la araneoj proporcias al la nombro de la muŝoj forkaptitaj dum la nombro de araneoj malproporticias al la nombro de minutoj bezonataj.

Do $x = 5 * 100/5 * 5/100 = 5$ araneoj

Tiam

5 araneoj dum 100 minutoj forkaptas 100 muŝojn.

- **La skaloj de la termometroj**

Iu anglo diris ke la averaĝa temperaturo en Londono je 1an de aŭgusto estis la duoblo de tiu de februaro. Sed li elkalkulis per skalo Farenhajt. Iu vizitanto eskimezo elkalkulis per la skalo Celsius kaj diris ke fakte la temperaturo estis la sesoblo de tiu de februaro. Se ambaŭ viroj pravis, ĉu vi povas diri kion indikis envere la termometroj?

Solvo

Estas sciite ke al temperaturo 0° C korespondas la temperaturo 32° F, kaj al temperaturo 100° C korespondas la temperaturo 212° F.	Interrilato de la grado Farenhajt, Celsius, Kelvin kaj Rankin		
		De C, K, R al F	De F al C, K, R
	Celsius	$[^{\circ}\text{C}] = ([^{\circ}\text{F}] - 32) \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}\text{F}] = [^{\circ}\text{C}] \times \frac{9}{5} + 32$
	Kelvin	$[\text{K}] = ([^{\circ}\text{F}] + 459.67) \times \frac{5}{9}$	$[^{\circ}\text{F}] = [\text{K}] \times \frac{9}{5} - 459.67$
	Rankine	$[^{\circ}\text{R}] = [^{\circ}\text{F}] + 459.67$	$[^{\circ}\text{F}] = [^{\circ}\text{R}] - 459.67$

Tiam la interrilito de ambaŭ skaloj de temperaturo estas:

$$A^{\circ}\text{C} = (32 + 180/100 * A)^{\circ}\text{F}$$

$$\text{Ekz. } 0^{\circ}\text{C} = (32 + 180/100 * 0)^{\circ}\text{F} = 32^{\circ}\text{F}$$

$$100^{\circ}\text{C} = (32 + 180/100 * 100)^{\circ}\text{F} = 212^{\circ}\text{F}$$

Inverse, se A notas la temperaturon en Farenhajt, tiam la temperaturo en Celsius estas

$$(A - 32)/1.8$$

Laŭ la kondiĉo, je 1an de februaro ĝi estis sesono de tiu je 1an de aŭgusto.

$$\text{Ni havas la ekvacion } 6 \cdot (A - 32)/1.8 = (2A - 32)/1.8$$

$$\text{aŭ } 6A - 192 = 2A - 32$$

$$\text{aŭ } 4A = 160$$

aŭ $A = 40^\circ \text{ F}$, aŭ $(40 - 32)/1.8 = 8/1.8 = 5^\circ \text{ C}$ estis la temperaturo en februaro kaj 30° C estis ĝi je 1an de aŭgusto en Londono.

Ludoj

- **Kiu gajnas**

Ludas du personoj A kaj B. Komencas A.

A mencias nombron naturan de 1 ĝis p (inkluzive de p). Poste B aldonas al ĉi nombro alian naturan nombron de 1 ĝis p (inkluzive de p).

La ludo daŭras ĝis kiam oni atingas nombron C (kie $C > p$).

Montru kiu gajnas kaj kiel devas agi persono por ĉiam gajni?

(Fakte pli ofte gajnos A kaj iamfoje B. Kiel estiĝos ĉi tio? Kian rilaton devas havi C kaj p, por ke gajnu B?)

Solvo

Ni ekspliku ĉi tion per aparta kazo. $C = 100$ kaj $p = 10$

Se A okupas la poziciojn 1; 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89; li estas certiginte la venkon. Do

$$(C - 3p - 3); (C - 2p - 2); (C - p - 1).$$

- **Stakoj da alumeteroj**

Tri stakoj da alumeteroj staras surtable, ekz. la stakoj konsistas el 13, 16 dhe 19 alumeteroj.

A elektas unu el la stakoj kaj eltiras tiom da alumeteroj kiom li volas (eĉ la tutan stakon). Poste B agas similmaniere, ktp.

Gajnas tiu kiu eltiras la alumeteron aŭ la alumeterojn lastajn. Ĉu vi povas diveni la strategion de la gajnago?



- **La jarnaskiĝo**

Vizitante en la jaro 1975 amikon okaze de lia naskiĝtago, mi petis lin pri lia aĝo. La respondo estis:

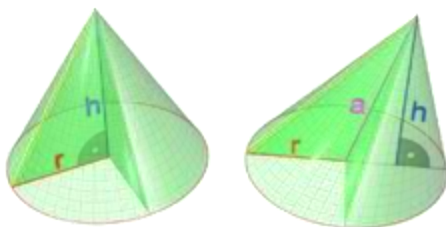
“Se vi multiplikas mian aĝon per la sumo de la ciferoj de mia naskiĝtago, vi trovos mian jarnaskiĝon”. Kiom jara estis la amiko?

Noto

(ekzistas solvo sed ĝi dependas de la jaro 1975. Kaj se estus alia jaro, ĉu eblis la solvo?)

- **La konuso je maksimuma volumeno**

El cirkla disko (je radio ekz. 1 dm) eltranĉu sektoron je centra angulo tia ke per ĝi oni povas konstrui konuson je maksimuma volumeno.



Solvo

La maksimuma volumeno troviĝas per la metodo de derivaĵo kaj rezultiĝas $p = \pi\sqrt{2}$

- **Surpiede tra dezerto**

Vojaĝanto volas trapasi la dezerton laŭ donita itinero, trairante ĉiutage po 20 km kaj kunportante dumvoje nur tritagan rezervon da nutraĵoj, dume la nutraĵojn oni povas havigi al si nur en la enirpunkto de la vojaĝo. Fine de la taga vojaĝo li povas deponi la nutraĵajn rezervojn en la loko kie li atingis por ke uzi ilin estonte.

Kiu estas la minimuma kvanto de la tagoj en ĉi kondiĉoj por ke la vojaĝanto povu trairi la dezerton laŭ donita itinero el 80 km? Ĉu li povas trairi la dezerton dum 15 tagoj se la itinero longas 100 m?



Solvo

Ni supozu la longecon de la itinero je 80 km kaj la punktojn A, B, C, D, E la sinsekvajn staciojn je distanco po 20 km unu de la alia. A estas la inica enirpunkto dum E la lasta punkto de la itinero. Vidu la figuron.

A. _____ B _____ C _____ D _____ E

Ĉar per nutraĵa rezervo por tri tagoj la vojaĝanto povas trairi 60 km, li bezonas halti almenaŭ en unu el la punktoj B, C kaj D por deponado. Kompreneble, la unua deponado devas okazi en la punkto B, ĉar se tio okazus sur punkto C aŭ D, tiam al li ne sufiĉus la nutraĵa rezervo por ke revenu denove al la punkto A kaj reporti novan porcion de la nutraĵo.

Haltante sur punkto B, li povas deponi unutagan nutraĵrezervon, ĉar tiom da bezonatas por ke li revenu al A. Tiel li elspezis du tagojn. Se li denove provizas sin en A kaj ekvojaĝas, tiam li povas ricevi en B la unutagan nutraĵrezervon kaj pluiri ĝisfine entute dum 6 tagoj.

Se la itinero estus 100 km, tiam la vojaĝanto povas trairi dum 15 tagoj kiel jene. Dum ok tagoj li lasas la parton de nutraĵoj en la punkto B je distanco 20 km for de A, kvartagan porcion. Poste li ricevos en A tritagan porcion kaj alvenos al B prikonsiderante tie rezervon sestagan.

El la supra problemo rezultiĝas por la distanco 80 km, restanta al li, bezonatas ankoraŭ ses tagoj. Tio estas $8 + 1 + 6 = 15$ tagoj. Malpli ol 15 tagoj ne dufiĉus al li realigi la itineron. Provu!

- **Kamiono en la dezerto**

Kamiono devas trapasi iri kaj reen vojon en la dezerto je longeco 1700 km. Ĝi povas porti kvanton da petrolo maksimume por 1320 km. Por kiom da km devas sufiĉi la minimuma kvanto de petrolo en la elirpunkto kaj kiamaniere oni devas plani plej bone la vojaĝadon? (sur la alia rando de la dezerto oni ne eblas provizi sin per petrolo)



Instrukcio

La ŝoforo devas krei interajn staciojn en la dezerto kie li deponu certan kvanton de petrolo. Ni supozu ke la unua stacio troviĝas je x km for kaj la kamiono elspezas y litroj da petrolo por ĉiu km. Tie la ŝoforo devas lasi kvanton de petrolo el $(1320 - y - 2xy)$ kaj revenu denove al la elirpunkto, bazo. Poste li devas ŝarĝi la petrolujon kaj relasi sur la stacio denove samkvanton de petrolo kelkfoje tiom kiom tio ebligus al li ĝisiri al la destino kie denove li devas lasi alian certan kvanton de petrolo.

La kapharoj

Ni supozu ke la homo ne povas havi pli ol 100 000 haroj sur sia kapo.

a) Ĉu ekzistas homoj en Varna (urbo en Bulgario el 250 000 loĝantoj) je sama nombro da kapharoj?

b) Kaj en Reykjavik (ĉefurbo de Islando, el 90 000 loĝantoj), ĉu estas homoj je sama nombro da haroj?

(La dua respondo ne certas, sed ĉu vi povas trovi ties probablon?)



Solvo

En Varna certe ke ekzistas homoj je samnombro da haroj. En Reykjavik la probablo estas 0.9.

- **La numeraj tabeloj**

Du homoj, nevidante unu la alian, skribas po dek diversaj naturaj numeroj de 1 ĝis 100 (inkluzive). Kioma estas la probablo ke la numeraj tabeloj estu identaj, kaj ke en ili estu egalaj nombroj?

Nombroj

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

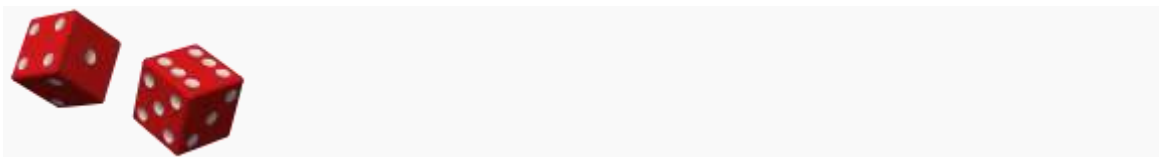
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Solvo

La probablo ke ambaŭ homoj skribu la saman nombron estas $0.01^2 = 0.0001$. La probablo ke la tabeloj estu identaj estas 0.0001^{10}

- **La ludo kun ĵetkubo**

Ni supozu ke iu persono gajnas 40 L se la ĵetkubo montras 1, 2 aŭ 3. Cetere li gajnas 30 L se la ĵetkubo montras 4 aŭ 5. Li perdas 120 L se la ĵetkubo montras 6. Elkalkulu la matematikan ekspekton ĉi kaze.



Solvo

La matematika ekspekto troviĝas per la formulo

$$E = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = \frac{3}{6} * 40 + \frac{2}{6} * 30 - \frac{1}{6} * 120 = 0.10$$

Do, en ĉiun dekan kazon l gajnas unufoje.

Alia versio



Ludas du personoj. Se la ĵetkubo montras 1, la ludanto konservas la kvanton aktualan de poentoj kaj la ĵetkubon transdonas al la alia ludanto.

Se la ĵetkubo montras 2, 3, 4, 5, 6, la ludanto agas tiel:

a) aldonas la montritan nombron de poentoj al la aktualaj siaj poentoj kaj transdonas la ĵetkubon al la kontraŭulo;

b) daŭrigas la ludon ĵetante la kubon kelkfoje ĝis kiam la kubo montros 1. Kiu akumulos pli da poentoj en ĉi tiu ludo?

Solvo: Estas kelkaj strategioj en ĉi iu ludo antaŭ la ludanto:

Post kiam li fiksas certan kvanton de poentoj N , li ĵetas la kubon ĝis kiam li akumulos tiun kvanton, poste transdonas la kubon al la kontraŭulo.

Aŭ fiksas certan nombron de ĵetoj n , haltas kiomfoje li plenumas ĉi nombron de ĵetoj.

Laŭ la unua strategio, do postkiam li estas akumulinte N poentoj, se li provos ĵeti la kubon ankoraŭfoje, lia ŝanco estos $1/6$ por obteni poentojn (kiam kubo montras 1). Kaj $5/6$ por obteni pluse 2, 3, 4, 5, 6 aldonajn aliajn poentojn. La ekspekta gajno estos ĉikaze $1/6 \cdot 0 + 1/6 \cdot (N + 2) + 1/6 \cdot (N + 3) + 1/6 \cdot (N + 4) + 1/6 \cdot (N + 5) + 1/6 \cdot (N + 6) = 5 \cdot (N + 4)/6$

Kompreneble, li devas halti kiam la ekspekta gajno estos malpli aŭ egala al N .

$5 \cdot (N + 4)/6 \leq N$ ti estas $N \geq 20$.

Do indas riski por 19 poentoj ĵetante la kubon denove, por 20 poentoj ni povas reĵeti la kubon aŭ halti, dum por pli ol 20 poentoj ne estas oportune por ni. Kiomfoje la ludanto ĵetas la kubon, li havas ŝancon $5/6$ por ke ne perdu, dume la averaĝa nombro de la poentoj kiujn li aldonas al si estas 4 (kial?).

Por n fojoj da ĵetoj ni havas $(5/6)^n$ ŝancoj por ke ne perdu kaj akumuli $4n$ poentoj. La ekspekta gajno dum la n . foja ĵeto estas tiam $4n \cdot (5/6)^n$.

Ni devas halti kiam n estos tia ke la ekspekta gajno dum la $(n + 1)$ fojo de ĵeto estu $\leq$ ol la analoga gajno dum la n foja ĵeto

$$4n \cdot (5/6)^{(n+1)} \leq 4n \cdot (5/6)^n$$

De kie rezultiĝas $n \geq 5$.

La ekspekta gajno dum la kvinobla aŭ sesobla ĵeto estas la sama. Sekve ni povas ĵeti 5 aŭ 6 foje sinsekve.

Se la ludanto decidas ĵeti la kubon, ne akumulinte pli ol 20 poentoj, la probablo por obteni 21, 22, 23, 24, 25 poentoj aŭ 26 poentoj estos kiel jene:

Nombro de la poentoj	21	22	23	24	25	26
Probablo en %	9.49	9.08	7.08	5.18	3.38	1.61

La ekspekta nombro de poentoj M_1 akumulitaj dum serio de ĵetoj, laŭ la unua strategio estos:

$$M_1 \approx 21 \cdot 0.094 + 22 \cdot 0.0908 + 23 \cdot 0.0708 + 24 \cdot 0.0517 + 25 \cdot 0.0338 + 26 \cdot 0.0166 \approx 8.34$$

Dum laŭ la dua strategio ĝi estos:

$$M_2 \approx 20 \cdot (5/6)^5 \approx 8.04$$

Tiel la unua strategio rezultiĝas pli fruktodona.

- **Ludo kun monero kaj ĵetkubo**

Ludas personoj A kaj B ĵetante moneron. Komencas A, poste ludas B, poste denove A, poste B ks. Gajnas tiu kiu ĵetas “la una” moneron montranta la Lekon. (estas ja du eblecoj, “Leko” kaj “Figuro”)

La samaj personoj nun ĵetas kubon. Gajnas tiu kiu ĵetas la unua “seson”. Trovu kiel oni disdonas la probablojn de la profito inter A kaj B en ambaŭ ludoj.

Respondo

(Vi trovos ke A havas pli grandan probablon)

- **La aĝoj de la filinoj**

Se oni rondigas la aĝojn de tri filinoj en entjeroj, konstateblas ke la produkto de tri aĝoj estas 36, ĝuste tiom kiom la numero de mia hejmo. Iu persono pripensiĝinte, demandis la dommastrinon: ĉu vi povus helpi min per aldona infomaĵo? Ŝi pravigis lin kaj respondis: ĉu vi aŭskultas ke kelkiu estas pianoludante supre. Ŝi ja estas la pli aĝa filino. La ceteraj du estas ludante kun sia avino.

Tio sufiĉis al li por diveni la aĝojn de tri filinoj. Kiuj do estis ili, kompreneble rondigitaj?



Solvo

36 povas esprimiĝi kiel produkto de tri entjeroj kiel jene:

$$36 = 18 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 4 \cdot 1 = 12 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \cdot 3 \cdot 2$$

Laŭ la kondiĉo, la pli aĝa filino povus esti 18, aŭ 9, aŭ 12, aŭ 6 jara.

Sed ŝi kapablas pianoludi plej verŝajne je 18 jaraĝo. Ĉi kaze la filinoj aĝas respektive 18; 2; 1 kaj la numero de mia hejmo estas 21.

- **La klubo de la saĝuloj kaj la superŝranko**

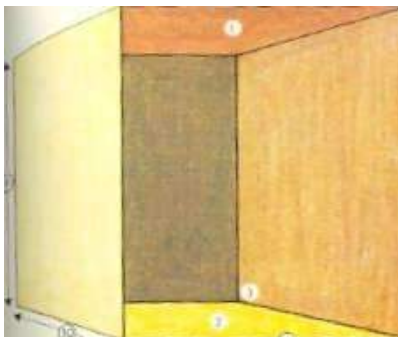
En klubo de la saĝuloj oni estis ekzaminante kandidaton. La estro starigis ĉi problemon:

Vidu, malantaŭ la kurteno staras ŝranko (je alteco pli granda ol larĝeco) je ĉi specialaj ecoj:

La longeco, larĝeco, kaj alteco havas komunan maksimuman mason en cm je entjero pli ol 1 dm. Ĉi nombro estas tre grava por ni, ĉar estas ja bazo de niaj unuoj ĉu por longoj, ĉu por surfacoj ĉu por volumenoj.

La mirinda eco de la superŝranko nia estas ke la nombro de la volumenaj unuoj egalas al la nombro de surfacaj unuoj. Ĉi nombron ni nomu S (nombro de superŝranko). Kaj ĉi nombro estas preskaŭ magika por ni.

Kompreneble li ne posedas ordinariajn ecojn. Ekz. Ĉi nombro estas kvadrato (de iu natura nombro).



Ĉu vi povas diveni ĉi donitaĵojn, la nombrounojn de la longo, larĝo kaj alto de nia superranko kaj la nombron S?

Kandidato K: Mi klopodos. Morgaŭ vi havos mian respondon (kaj li hejmeniras por pripensiĝi)

La morgaŭon K diras: Mi jam trovis vian nombron S kaj same la nombrounojn de la longo, larĝo kaj alto. Krome, mi trovis la tri masojn de via superranko, ne nur esprimitaj laŭ viaj unuoj, sed ankaŭ en cm. (kaj li montris ilin).

Estro: (mirigite) Ho, vi pravas, sed laŭ mi, vi ne povis ellerni ĉion tion surbaze de miaj informoj sed certe vi havis iom da ŝanco. . !

K: Ho, ne, mi ĵus enirinte en vian ĉambron, estimis la altecon de ĝi malpli ol 4 m, pli precize 3. 75 m. Kaj ĉar mi havas sufiĉan sperton en tiaj estimadoj pri la dimensioj mi scias ke en la skalo de la ĉambro oni povas erari maksimume 1 dm.

Plue, mi komprenis ke vi estas farinte la superrankon plejeble alta, do tiom kiel mem via ĉambro. Tiel validas nur la respondoj jam diritaj al vi.

Estro: Vi pravas.

Do, kiuj estas la dimensioj de la superranko ankaŭ en cm? Kaj la supernombro S? Ĉu K indas ke oni akceptu lin en la klubo de saĝuloj?

• Vilaĝanoj

Du virinoj A kaj B el la vilaĝo vendas ovojn (kompreneble ili bredas kokinojn hejme).

A ĉiusemajne produktas 30 ovojn kiujn ŝi vendas tri ovojn kontraŭ 1 euro. Tiel ŝi enspezas ĉiusemajne 10 eurojn.

B same produktas 30 ovojn sed iomete pli grandajn tial ŝi vendas ilin du ovojn kontraŭ 1 euro, enspezante 15 euroj semajne.

Iutage A estis malsana, tial ŝi petis sian amikino B kunvendi ankaŭ siajn ovojn. Oni konsentis vendi 5 ovojn kontraŭ 2 euroj. B akceptis. Sed rehejmeveninte, B alportis entute 24 euroj laŭ antaŭvido ($60:5 = 12 \cdot 2 = 24$). Se ili vendus la ovojn aparte la entuta enspezo estus 25 euroj ($10 + 15$).



Kie perdiĝis unu euro?

Instrukcio: Atentu ĉe eniroj kaj eliroj de la mono!

- **La nomoj**

La nomoj de kvin gejunuloj, maskloj kaj inoj, estas notitaj per la kodigitaj nombroj kiel jene:

98795; 959; 98748; 281; 289

Sciante ke ĉiu cifero prezentas la saman literon, trovu la nomojn de la gejunuloj.



Solvo

(jen unu respondo) : Alban; Ana; Albil; Eli; Ela

- **La kaŝita skribo**

Se la vorto MIELO estas skribita per la kodigitaj ciferoj 18 13 7 17 20, kiel kodigitus la vorto SUKERO?



Whitefield Diffie kaj Martin Hellman, aŭtoroj de la unua artikolo pri kriptografio

Solvo

Prikonsiderante la alfabeton de Esperanto (A, B, C, Ĉ, D, E, F, G, Ĝ, H, Ĥ, I, J, Ĵ, K, L, M, N, O, P, R, S,Ŝ, T, U, Ŭ, V, Z) konstateblas ke la literoj estas elektitaj unu pli poste ol ilia normala ordo en la alfabeto. Do la vorto SUKERO skribiĝus 23 26 16 7 22 20

- **Kriptogramo per ŝlosilo**

Kriptogramo nomiĝas kaŝita anonco, tio estas kodigita kiu povas legiĝi nur de personoj sciintaj la manieron de ties skribiĝo. Estas pluraj kodigaj manieroj, el kuj multaj baziĝas sur matematiko. Ni esploru unu simplan, tiun kun ŝlosilo.

La tuta teksto dividiĝas en apartajn grupojn de literoj kaj en ĉiu grupo la literoj translokiĝas laŭ certa maniero.

La literoj de la teksto komence skribiĝas sur rektangula tabelo sur vicoj je sama nombro da literoj. La literoj de la vorto- ŝlosilo skribiĝas sur la kolonoj kaj indikas la ordon de ĉi kolonoj. Jen kiel:

Teksto: Renkontiĝo okazos en la centro de bazaro je la sepa vespere neniun manku anoncu ankaŭ amikojn.

Ni nombru la literojn en la teksto. Estas entute 77 literoj. Do taŭgas tabelo 11 x 7



La cifereca germana maŝino Lorenz uzata dum milito

La vorto ŝlosilo estu ALBANIO kaj la respektivaj nombroj 5 3 0 7 4 1 8

Tiam ni obtenas ĉi tabelon:

5	3	0	7	4	1	8
R	E	N	K	O	N	T
I	Ĝ	O	O	K	A	Z
O	S	E	N	L	A	C
E	N	T	R	O	D	E
B	A	Z	A	R	O	J
E	L	A	S	E	P	A
V	E	S	P	E	R	E
N	E	N	I	U	M	A
N	K	U	A	N	O	N
C	U	A	N	K	A	Ŭ
A	M	I	K	O	J	N

Nun ni vidu kiel skribiĝos la supra teksto per kodo:

Sub la nombro 0 estas la literoj **NOETZASNUAI**,
sub la nombro 1 estas **NAADOPRMOAJ**,
sub la nombro 3 estas **EĜSNALEEKUM**,
sub la nombro 4 estas **OKLOREEUNKO**,
sub la nombro 5 estas **RIOEBEVNNCA**,
sub la nombro 7 estas **KONRASPIANK**
kaj sub la nombro 8 estas **TZCEJAEANŬN**

Kunigite en unu frazo ili aperas tiel:

**NOETZASNUAINAADOPRMOAJEĜSNALEEKUMOKLOREEUNK
ORIOEBEVNNCAKONRASPIANKTZCEJAEANŬN**

Por legi ĝin la ricevonto de ĉi mesaĝo devas plenumi la inversajn agojn.
Tiucele certe li devas scii la vorto - ŝlosilon ALBANIO kaj la nombron 5 3
0 7 4 1 8

La frazo entenas 77 literojn, la vorto ALBANIO havas sep literojn, tial li
devas dividi ĉi frazon en tabelon el sep vicoj po 11 literoj kiel jene:

NOETZASNUAI	0
NAADOPRMOAJ	1
EĜSNALEEKUM	3
OKLOREEUNKO	4
RIOEBEVNNCA	5
KONRASPIANK	7
TZCEJAEANŬN	8

Prikonsideru nun nian nombron 5 3 0 7 4 1 8. Ni ordigu ankoraŭ foje ĉi sep vicojn alie, konforme al nia nombro, tio estas komence tiun vicon korespondanta al 5, poste tiun vicon korespondanta al 3, ks.

RIOEBEVNNCA	5
EĜSNALEEKUM	3
NOETZASNUAI	0
KONRASPIANK	7
OKLOREEUNKO	4
NAADOPRMOAJ	1
TZCEJAEANŬN	8

Nun la mesaĝo povas legiĝi laŭ la kolonoj:

RENKONTIĜOOKAZOSENLABAZAROJE LASEPAVESPERENENIU
MANKUANONCUANKAŬAMIKOJN

Fine oni dividas la vortojn:

RENKONTIĜO OKAZOS EN LA BAZARO JE LA SEPA VESPERE
NENIU MANKU ANONCU ANKAŬ AMIKOJN

• Ekzerco:

Kodigu laŭ la supra maniero laŭ la vorto ŝlosilo SPEKTRO kaj nombro 8039452 la malsupran mesaĝon:

- 1 La patro venos moragŭ*
- 2. La matĉo ne okazos mrekrede*
- 3. La figo ankoraŭ ne maturiĝs dum la moruso jes*

Kriptogramoj per matricoj

Kutime la kriptogramoj povas riveliĝi de spertuloj el diversaj kampoj de matematiko kaj informadiko uzante ankaŭ rapidajn komputilojn. Sed tre malfacile estas la riveliĝo de la kodigitaj skribaĵoj per matricoj kiel jene:

Ni supozu ke devas kodigi ĉi mesaĝon en la angla:

Meet me Monday

Prikonsiderante la anglan abocon, (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z) al ĉiu litero ni akompanu numeron montranta la lokon kiun okupas ĝi en la aboco, ekz. la litero 'e' havas numeron '5'.

La spacojn inter la vortoj ni notu per la cifero '0'

Tiam ni obtenus vicon de numeroj:

13 5 5 20 0 13 5 0 13 15 14 4 1 25 0

Ni dividu ĉi tion en triopajn grupojn konsiderante matricon 1x3 ekz:

[13 5 5], [20 0 13], [5 0 13], [15 14 4], [1 25 0] korespondanta al

MEE T - M E - M OND AY -

Ni konsideru la matricon

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ni multipliku ĉiujn matricojn 1x3 de la triopoaj grupoj ĉi suprajn al tiu matrico 3x3. Rezultiĝos:

[13 - 26 21], [33 - 53 - 12], [18 - 23 - 42], [5 - 20 56], [-24 23 77]

Ni demetu la krampojn

13 - 26 21 33 - 53 - 12 18 - 23 - 42 5 - 2 - 56 - 24 23 77

Ĉi tio estas la kodigita mesaĝo.

Certe estas tre malfacile, preskaŭ neebla ke ordinara homo diveni la sencon de la vortoj kaŝitaj en ĝi. Ĉu ne?

Do ĝis nun ni agis tiel:

Ni notis per numeroj difinitan mesaĝon $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ do
matricon $1 \times n$

Ni multiplikis ĝin per la donita matrico A kiel supre $Y = X * A$

Ni obtenis la kodigitan matricon $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$

Por dekodigi tion kaŝitan en ĝi ni agas inverse (ĉiam se ni konas la matricon
 A kaj scias ke la vortoj estas grupigitaj laŭ la matrico $1 \times n$

$$Y * A^{-1} = X * A * A^{-1} = X$$

Do ni bezonas la inversan matricon al la matrico A

Aplikante la regulon de la obteno de la matrico A^{-1} ricevos

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplikinte Y per A^{-1} ricevas $X = [X_1, X_2, \dots, X_n] =$

$$[13 \ -26 \ 21 \ 33 \ -53 \ -12 \ 18 \ -23 \ -42 \ 5 \ -2 \ -56 \ -24 \ 23 \ 77]$$

Tion ni dividas en triopajn grupojn kiujn ni multiplikas unu al unu kun la
matrico inversa A^{-1} obtenante la inican vicon

$$[13 \ 5 \ 5], [20 \ 0 \ 13], [5 \ 0 \ 13], [15 \ 14 \ 4], [1 \ 25 \ 0]$$

Nun ni notu la respektivajn literojn de la angla aboco sube de ĉiu cifero ne
nula kaj spaco sub nuloj.

Ni ricevos la inican mesaĝon

MEE T - M E - M OND AY -

Aŭ pli ĝuste

Meet me Monday

Provu mem kodigi tiamaniere la mesaĝon:

La matĉo komenciĝos postmorgaŭ konsiderante matricon 1×3 ekz. kaj
matricon 3×3 laŭ deziro

- **Du fratoj kaj la ŝafoj**

Du fratoj posedis gregon da ŝafoj. Ili vendis la gregon kaj enspezis tiom da rubloj (rusa monunujo) por ĉiu ŝafo kiom estis la nombro de la ŝafoj en la grego. La mono disdividiĝis tiamaniere:

Unue ricevis la pliĝa frato, 10 rubloj; poste ricevis la alia frato, 10 rubloj; denove ricevis la pliĝa frato 10 rubloj; poste denove la alia frato 10 rubloj. Tio daŭris kelkaj fojoj. Finfine la malpli aĝa frato ricevis malpli ol dek rubloj. Pro tio, la pliĝa frato donacis al li sian tranĉileton, je rekompenco. Divernu mem kiom kostis la tranĉileto?

Solvo



Ni notu per n la nombron de la ŝafoj.

Tiam, laŭ la kondiĉo, ĉiu ŝafo kostis n rubloj. Entute $N = n \cdot n = n^2$ rubloj.

Ni nun esprimu n kiel duciferan nombron (ĉar la ŝafo ne povus kosti pli ol 99 rubloj!) Do $n = 10d + e$ (d dekoj, e l unuoj)

Tiam $N = 100 d^2 + 20 de + e^2$

Ĉar la kvociento de la nombro de la rubloj de pliĝa frato al 10 transpasas la kvocienton de la divido de la nombro de la rubloj de malpliĝa frato al 10, rezultiĝas ke N estas nepara nombro. (ĉar la mono estas dividita ne en egalajn partoj, . . .)

Do, $100 d^2 + 20 de + e^2 = 20 d (5d + e)$ divideblas per 20, tial la kvociento de ties divido per 10 estas para nombro. Tio eksplikas ke kiam la nombro e^2 dividiĝas per 10, rezultiĝas nepara nombro.

Ĉar $e < 10$ tiam e^2 povas obteni unu el la valoroj: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81.

Sed nur 16 kaj 36 havas neparajn ciferojn sur la loko de dekoj. Sekve, e^2 estas 16, aŭ 36. Ambaŭ ili finiĝas per 6. Tial, la malpliĝa frato estas

ricevinta 6 rubloj anstataŭ 10 rubloj. Sekve la pliaĝa frato estas ricevinta 4 rubloj pli. Por rekompenci lin la tranĉileto devus valori ĝuste 4 rubloj!

- **5 amikoj kaj la simio**

Estas sako da nuksoj, la simio kaj kvin amikoj.

Alvenas la unua amiko, dividas la nuksojn en kvin egalajn grupojn, sed restas unu nukso. Tion li fordonas al simio, ricevas sian parton kaj foriras.

Poste alvenas la dua amiko kiu agas similmaniere: dividas la restintan

kvanton de nuksoj en kvin egalajn partojn, sed restas unu nukso, kiun li fordonas al la simio. Li ricevas sian parton kaj foriras.

Tute simile agas ankaŭ ĉiuj tri aliaj amikoj. Finfine en la sako restas certa kvanto de nuksoj, kiun la kvin amikoj dividas denove en kvin egalajn partetojn, restas unu nukso kiun ili donas al la simio, dum ĉiu ricevas unu parton.

Ĉu vi povas diveni kiom da nuksoj havis la sako dekomence?



Solvo

Ni ekiru de la fina momento. Ni notu per n la nombron de la nuksoj ricevita de ĉiu amiko lastan fojon. Tiam la entuta nombro de la nuksoj en la sako antaŭ tiu momento estis $(5n + 1)$

La lasta amiko estas ricevinta $(5n + 1)/4$. Antaŭ tio, en la sako devus esti entute

$5(5n + 1) \cdot 4 + 1 = (25n + 9)/4$ nuksoj.

La kvara amiko estas ricevinta $\frac{1}{4} \cdot (25n + 9)/4$ nuksoj kaj antaŭ tio en la sako estis

$5 \cdot (1/4) \cdot (25n + 9)/4 + 1 = (125n + 61)/16$ nuksoj.

La tria amiko estas ricevinta $\frac{1}{4} \cdot (125n + 61)/16$ nuksoj kaj antaŭ tio en la sako estis

$5 \cdot \frac{1}{4} \cdot (125n + 61)/16 + 1 = (625n + 369)/64$ nuksoj.

La dua amiko estas ricevinta $\frac{1}{4} * (625n + 369)/64$ nuksoj kaj antaŭ tio en la sako estis $5 * \frac{1}{4} * (625n + 369)/64 + 1 = (3125n + 2101)/256$ nuksoj.

Finfine, la unua amiko estas ricevinta $\frac{1}{4} (3125n + 2101)/256$ nuksoj kaj la entuta kvanto de nuksoj en la sako devus esti

$$N = 5 + \frac{1}{4} * (3215n + 2101)/256 + 1 = 15625n + 11529)/1024 = 15n + 11 + (265n + 265)/1024.$$

Ĉar la nombro N devas esti natura nombro, tiam la esprimaĵo $(265n + 265)$ devas dividebli per 1024. Ĉi kaze la malplej granda nombro kontentiganta ĉi kondiĉon estas 1023. Tial

$$N = 15 * 1023 + 11 + 265 = 15621 \text{ nuksoj.}$$

Alia solvo

La unua kondiĉo montras ke kiam la nuksoj dividiĝas en kvin partojn ĉiam restas unu nukso. Do la divido de N per 5 donas reston 1. $N = 5q + 1$

La diferenco de ĉiuj du najbaraj nombroj de formo $5q + 1$ estas $+ 5$ ose $- 5$ kaj sciante unu el ili ni povas trovi senfine aliajn nombrojn de ĉi formo aldonante aŭ malpliigante multoblon de 5.

La dua kondiĉo montras ke la nombro $k = 4/5 (N - 1) = 4q$ divideblas per 5, donante reston 1, tio estas $k = 5q_1 + 1$

Tio egalvaloras al la demando ke kiam q dividiĝas per 5 la resto devas esti 4 kio sekvigas ke $N = 5q + 1$ dividiĝas per 25 donante la reston 21.

La diferenco de du tiaj najbaraj nombroj estas plus minus 25 kaj sciante unu el ili ni obtenos ĉiujn aliajn.

Similmaniere ni diras ke la nombro $k_1 = 4/5 (k - 1) = 4q_1$ dividiĝas per 5 donante reston 1. Tio difinas la reston de la divido de q_1 per 5, la reston de la divido de q per 25 kaj la reston de la divido de N per 125.

Ĉiuj kondiĉoj de la problemo difinas la reston rezultiĝanta de la divido de N per 5^6 kio estas $ja = 15625$.

La diferenco inter du najbaraj nombroj kontentigantaj ĉi kondiĉojn estas plus minus 15625. Oni povas elkalkuli la reston rezultiĝanta de la divido de N per 5^6 sed ni povas sukcesi ankaŭ sen tio.

La afero estas ke almenaŭ unu nombro kontentiganta ĉiujn kondiĉojn de la problemo estas la nombro $(- 4)$.

Envere, kiam $(- 4)$ dividiĝas per 5, ni obtenas $(- 10)$ kiel kvocienton kaj 1 kiel reston. Tial, se ni substrahas 1 de $(- 4)$ kaj ricevas $4/5$ de la diferenco, kiu divideblas per 5, denove ni ricevos la saman nombro $(- 4)$

Pro analogieco, ĉiuj pluaj dividoj per 5 postlasos la saman reston 1.

Tamen, la nombro $(- 4)$ en si mem, ne povas esti respondo por nia problemo ĉar N devas esti pozitiva nombro. Sed sciinte unu el la nombroj

kontentigantaj la kondiĉojn de la problemo ni povas trovi arbitrarecan nombron el la ceteraj aldonante al ĝi ĉiun nombron multoblan de 5^6 .

La malplej granda pozitiva entjero kontentiganta la kondiĉojn estas sendube $-4 + 5^6 = 15621$

□ La korbo kun globetoj

La infanoj disdividis inter si la globetojn apartmaniere. La unua ricevis unu globeton kaj unu dekonon de la restintaj globetoj. La dua ricevis du globetojn kaj unu dekonon de la nova resto. La tria ricevis tri globetojn kaj unu dekonon de la denova resto. Samtiel agis ankaŭ la ceteraj infanoj. Trovu kiom da infanoj estis entute se ĉiu el ili ricevis po egala kvanto da globetoj.



Solvo

Ni notu per n la nombron de la infanoj, per x la kvanton de globetoj ricevita de ĉiu el la infanoj kaj per N la nombron de la globetoj entute. Tiam la unua ricevis

$$1 + (N - 1)/10 = x$$

La lasta same ricevis x globetoj.

La antaŭlasta ricevis $(n - 1) + x/9 = N/x - 1 + x/9 = x$, ĉar $9/10$ de la globetoj restintaj kiam la antaŭlasta ricevis $(n - 1)$ globetoj estas x kaj tio ricevita de li kompletigas $1/10$ de la resto kaj konsistigas $1/9 \cdot x$.

Por la unua $N = 10x - 9$, tiam por la lasta $(10x - 9)/x - 1 + x/9 = x$

Ĉi ekvacio povas reskribiĝi tiel:

$$8x^2 - 81x + 81 = 0 \text{ aŭ } (x - 9)(8x - 9) = 0.$$

Ĉar ĉiu infano ricevis plenan nombron da globetoj, akcepteblas kiel unnura solvo $x = 9$. Tio estas $N = 81$ kaj $n = 9$

□ La nombrovico

Estas necese 2893 ciferoj por ke ni obtenu ĉiujn nombrojn de 1 ĝis n . Kioma estas ĉi nombro n ?

Solvo

Por ke ni skribu 9 unuajn nombrojn bezonatas 9×1 ciferoj.

Por ke ni skribu 90 duciferajn nombrojn sekvantajn bezonatas 180 ciferoj;

por ke ni skribu 900 tri ciferajn nombrojn ceterajn bezonatas 2700 ciferoj.

Entute bezonatas 2889 ciferoj. Ĉi tio estas 4 ciferoj malpli ol la nombro donita por skribi ĉiujn nombrojn de 1 ĝis n .

Sekve n koincidas al la unua nombro kvarcifera, tio estas al 1000.

- **Miro kun la naskiĝjaro**

Substrahu de via naskiĝjaro ties sumon de la ciferoj. Vi obtenos nombron dividebla per 9. Provu mem. Kial tio okazas?

Solvo: Ni supozu ke la kvarcifera nombro notitas $ABCD = 1000A + 100B + 10C + D$. Ni substrahu de ĝi la sumon $A + B + C + D$. Rezultiĝas $999A + 99B + 9C$ kie evidentas ke ĝi povas faktorigiĝi per 9.

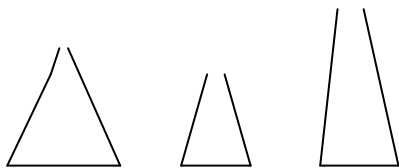
- **Tri miksaĵoj**

Por iu eksperimento en ĥemio, lernanto bezonis miksi tri soluciojn en tri diversaj ujoj mezuritaj per skalo, plenpenaj.

La duonon de la solucio el la tria ujo li enverŝis en la unuan kaj duan ujon egalkvante. La duonon de la miksaĵo estiĝinta en la dua ujo, sammaniere, li enverŝis en la unuan kaj trian ujojn; samtiel li agis kun la duono de la solucio de la unua ujo kiun li enverŝis egalkvante en la duan kaj trian ujon. Post ĉi agoj, la lernanto rimarkis ke en la tri ujoj la niveloj de la miksaĵoj estis la samaj, ĝuste 16 ml.

Ĉu vi povas diri kiom da ml estis antaŭ la miksaĵo en ĉiu ujo?

Respondo



Ni ekiru de la situacio finfine. Entute estas $3 \times 16 = 48$ litroj. Tiom ja estis ankaŭ ĉiamtempe.

16 16 16 litroj en ĉiu skaligita ujo
 32 8 8 litroj estis antaŭ ol ni enverŝu la duonon de la likvaĵo el la tria ujo
 28 16 4 litroj estis antaŭ ol n enverŝu la duonon de la likvaĵo el la dua ujo.
 26 14 8 litroj estis dekomence en ĉiuj tri ujoj, tio estas antaŭ ol ni enverŝu la duonon de la likvaĵo el la unua ujo.

Matematikaj krucvortoj

1	2	3	4	5	6		7
8					9	10	
11				12			
					13	14	15
16	17	18			19		20
21			22	23		24	
25		26		27	28		
	29	30				31	

Horizontale

- 1 La primoj sekvantaj inter 40 kaj 50.
- 7 La solvo de la ekvacio $(y^2 - 1) / (y + 1) = 3$
- 8 La solvo de la ekvacio $2X - 1492 = X$
- 9 $\sqrt[3]{1000000} =$
- 11 $7 \times (2 \times 10^3 + 1) =$

- 13 La unua primo post 100
 16. Trovu la altecon de la cilindro se ties volumeno egalas al 5. 516. 160
 $\pi \text{ cm}^3$ kaj $r = 104 \text{ cm}$
 19. $\sqrt[4]{81}$
 20. Solvu ĉi sistemon rilate al x : $(x + y)/3 = 2$ dhe $(x - y)/2 = -1$
 21. La primo pli proksime al 80.
 22. La nepara solvo de la ekvacio $50 - 27X = -X^2$
 24. La para solvo de la ekvacio $X^2 - 15X = -36$
 25. Solvu rilate al x : $x + y = 0$ kaj $x - y = 1332$
 27. 2^{10}
 29. (2) (3) (17)
 31. Solvo de $-10/(1 - 3X) = 5$

Vertikale

- 1 La nombro sekvanta pli granda ol 410 dividebla per 3.
 2 Kvadrato de 12.
 3 Solvo de la ekvacio $(X - 490)^2 = 0$
 4 16×20
 5 Pozitiva solvo de la ekvacio $X^2 + 7X = 44$
 6 La unua primo pli granda ol 70.
 7 Valoro de x por la sistemo $x + 2y = 160$ dhe $2x - y = 20$
 10 La malpli granda solvo de la ekvacio $32X^2 = 17X$
 12 Solvo de la ekvacio $2/(x + 3) = 3/(2x + 1)$
 13 Nepara solvo de la ekvacio $X^2 - 19X = -78$
 14 La pli granda solvo de la ekvacio $(x + 2)^2 = 4$
 15 $2^3(2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^0)$
 16 24^2
 17 14^2
 18 La pozitiva entjero malpli granda, ne primo
 19. Solvo de la ekvacio $\sqrt{x+1} = \sqrt{2X-1}$
 20. 2^9
 21. 11^2
 22. Pozitiva solvo de la ekvacio $X^2 - 60X = 61$
 23. Solvo de la ekvacio $5(m + 2) = 10$
 24. Solvo de la ekvacio $121^x = 1$

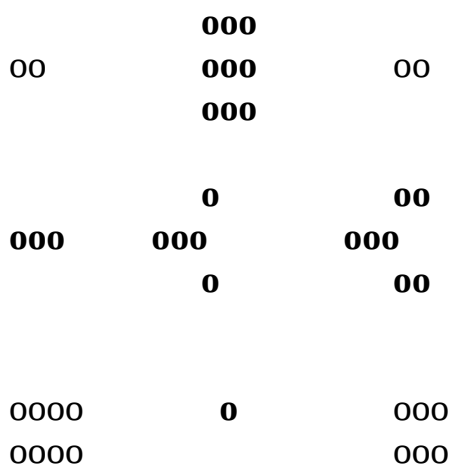
Respondo

Kompletigu en ĉi tabelo la malplenajn kvadratetojn per nombroj de 1 ĝis 9 tiel ke sur ĉiu vico kaj ĉiu kolono estu ĉiuj nombroj de 1 - 9; samtiel ĉiu kvadrateto kun 3 vicoj kaj tri kolonoj, t. e. 3x3, (naŭ etaj kvadratoj) havu ĉiuj nombrojn el 1 - 9

Magiaj kvadratoj²⁷

La magia kvadrato estas interesa ĉapitro de la amuza matematiko. Ĉi matematika ludaĵo devenas ekde antikveco. La kultura ĉina historio havas faman kreaĵon: “Kvin libroj” kiu datiĝas el la jarcentoj 8 kaj 7 antaŭ Kristo. En ĉi tiuj libroj enestas ankaŭ I - csing (Libro de transformiĝoj) kiu havis grandan influon al la ĉina kulturo.

Ĉi verko entenis filzofiajn tekstojn, aforismojn, simbolojn, magiajn agojn, profeciojn kaj same matematikajn rilatojn. La verko havis ankaŭ pentraĵon de sankta testudo kiu laŭ Kung fu - cu (Konfucio) montris sur ties dorso similan desegnaĵon al la kvadrato Lo - ŝu. Vidu sube!



Figuro 1

Sur la figuro 1 vidiĝas ĉi kvadrato. La neparaj nombroj prezentiĝas per etaj nigraj cirkloj, dum la paraj nombroj per etaj blankaj cirkloj. (en la antikva ĉina filzofio oni uzis malplenajn cirklojn anstataŭ nigraj kaj la lokiĝo de la nombro iom diversis).

²⁷ (Cserpita el sinjorino Susana Barabas , Oradea, Rumanio)

En ĉi figuro evidentiĝas la unua magia kvadrato enmonde.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figuro 2

Sur la figuro 2 vidiĝas la sama informajo sed per arabaj ciferoj.

Sur la magia kvadrato estas n ĉeloj en ĉiu vico kaj n ĉeloj en ĉiu kolono. En ĉiu ĉelo estas nombro (entjero). Se estas tri ĉeloj en ĉiu vico kaj en ĉiu kolono, ĉi kvadrato (3×3) apartenas al la rango “3”. La rango de la magia kvadrato povas esti 3, 4, 5, 6, 7 k. a. , senfine. La nombro de la ĉeloj en kvadrato estas n^2 ($n \times n$).

La ĉefa karakterizaĵo de la magia kvadrato estas la jena: la sumo de la nombroj en ĉiu vico, en ĉiu kolono, kaj en ĉiu diagonalo samas kaj estas konstanta. Ĉi konstanto nomiĝas “magia sumo”. Sur la figuro 2 la sumo ĉiudirekte estas 15. La figuro 1 similas iomete al la kvadrato antika de Lo Ĵu de Ĉinio.

Sur “normala” magia kvadrato la nombroj estas nur ia lerta relokiĝo de la aritmetika vico de la entjeroj de 1 ĝis n^2 . Estas ankaŭ magiaj kvadratoj ne “normalaj”.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figuro 3

Sur la figuro 3 vidiĝas alia magia kvadrato de rango 3. Fakte estas la sama kvadrato post speguliĝo kaj rotaciigo. Ekzistas nur unu magia kvadrato de rango 3!

3	20	7	24	11
9	21	13	5	17
15	2	19	6	23
16	8	25	12	4
22	14	1	18	10

Figuro 4

Sur la figuro 4 vidiĝas magia kvadrato de rango 5. La sumo de la nombroj ĉiudirekte en ĝi estas 65.

Nun ni parolu pri la magiaj kvadratoj kie la nombro de la ĉeloj sur ĉiu vico kaj ĉiu kolono estas para (dividebla pe 2) - vidu la figuron 6, se la rango estas 4 ($n = 4$). Se la magia kvadrato estas normala, la magia sumo estas 34.

Ni povas difini facilmaniere la magian sumon de ĉiu magia kvadrato, ĉu n (n vicoj kaj n kolonoj) estas para aŭ nepara. Se la aritmetika vico komenciĝas de 1 kaj kreskiĝas po 1 unuo kiel en “la normala kvadrato”, komence elkalkuliĝas la sumo de tuta aritmetika vico kaj poste ĝi dividiĝas per n . Ĉar la magia kvadrato entenas n vicojn kaj n kolonojn, la lasta entjera nombro en aritmetika vico devas esti n^2 . Ni supozu S la sumon de la aritmetika vico.

Ni povas diri ke $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2$.

Nun ni apliku la konatan formulon por la sumo de la aritmetika progresio:

$$S = (n^2 + 1) n^2 / 2$$

Sed ni ne volas la aritmetikan sumon, ni volas la magian sumon. Estas n vicoj en kiuj oni devas dividi ĉi sumon, aŭ estas n kolonoj por tia divido. Do por trovi la magian sumon (nomata de ni ekz. M) ni devas dividi egalmaniere la sumon de la aritmetika progresio per n :

$$M = S / n$$

$$\text{Do, } M = (n^2 + 1) n^2 / 2n = (n^3 + n^2) / 2n$$

La magia sumo M por diversaj valoroj de n rezultiĝas:

N	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
S	45	136	325	666	1225	2080	3321	5050 ...
M	15	34	65	111	175	260	369	505 ...

Figuro 5

Rimarku ke n devas esti pli granda ol 2, ĉar se $n = 2$ la nombroj en la ĉeloj devas esti egalaj inter si kaj la kvadrato mem reduktiĝas en banalaĵon.

Dum Mezepoko ĉi kvadratoj nomiĝis magiaj pro iliaj ecoj kaj oni gravurigis ilin sur metaloj aŭ ŝtonoj kiel talismanoj. Oni opiniis ke ilia magia forto savus la homojn kontraŭ la malbono kaj danĝero, eĉ kontraŭ la pesto!

Interese estas gravuraĵo je titolo “Melankolio” farita de la fama gravuristo germana Albrecht Dürer (1471 - 1528).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figuro 6

Sur ĉi tiu gravuraĵo oni trovis magian kvadraton (figuro 6) kiun oni estis kopiinta vaste tiutempe. Sur la mezo de la lasta vico staras la nombroj 15 kaj 14, kiuj legitaj kune donas la jaron kiam naskiĝis tiu gravuraĵo (1514). La magia sumo estas 34. Tiu magia sumo troviĝas en ĉi tiu kvadrato en 18 diversaj manieroj! Eble ankaŭ vi povas kontroli tion. Nu?

a1	a2	a3	a4
a5	a6	a7	a8
a9	a10	a11	a12
a13	a14	a15	a16

Figuro 7

$$\begin{aligned}
a1 + a2 + a3 + a4 &= 34 \\
a1 + a5 + a9 + a13 &= 34 \\
a1 + a6 + a11 + a16 &= 34 \\
a4 + a7 + a10 + a13 &= 34 \\
a1 + a4 + a13 + a16 &= 34 \\
a6 + a7 + a10 + a11 &= 34 \\
a1 + a2 + a5 + a6 &= 34 \\
a2 + a3 + a14 + a15 &= 34 \\
a5 + a8 + a9 + a12 &= 34
\end{aligned}$$

Figuro 8

Sur la figuro 7, ĉiu simbolo (a...a) indikas la lokon de la nombro. Sur figuro 6 kaj figuro 8 vidiĝas kelkaj el la multaj lokiĝoj de 16 nombroj sumantaj 34. Se ni speguligas ĉiun magian kvadraton kaj rotacias ĝin je 90 gradusoj, ni obtenos alian aspekton de la fundamenta magia kvadrato. Oni povas krei novajn magiajn kvadratojn ŝanĝante lertece la ĉelgrupojn (inkluzive de vicoj kaj kolonoj) sur la kvadrato.

(aldone, anstataŭ uzi la normalan aritmetikan progresion, ni povas komenci de ĉiu pozitiva aŭ negativa nombro kaj aldonu al ĝi kiun ajn alian konstantan nombron por krei la vicon. . La eblecoj estas senfinaj. Kompeneble, se ni faros tion nepre devas precizigi la elkalkulaĵojn por eltrovi la magian sumon.)

Aplikoj de matematiko en ekonomio

La ĉefaj konceptoj pritraktitaj ĉi ie estas : minimuma kosto, maksimuma profito, maksimuma volumeno ks.

Ekzemplo

- **La fabriko**

Ni supozu ke iu fabriko produktas du specojn de artikloj: A kaj B
Ĉiu unuo de A profitigas je 3 milionoj, dum ĉi unuo de B 7 milionoj da
euroj.

La fabriko devas produkti almenaŭ 1 A ĉiutage sed ne pli ol 5 tiaj, pro mem
la kondiĉoj de la produktado. Dum la nombro de unuoj por B estas ĝis 6
ĉiutage. Ankaŭ la nombro de la unoj de A estas malpli ol tiuj de B.

Demando: kiom da unuoj de A kaj kiom de B devas produkti la fabriko por
ke certigu maksimuman profiton?



Solvo:

Komence ni devas “traduki” la problemon en la matematikan lingvaĵon. Ni
supozu x unoj de A kaj y unuoj de B produktas la fabriko ĉiutage.

Ni havas do $5 \geq x \geq 1$

Kaj $y \leq 6$

Kaj $x \leq y$

Samtiel $x \geq 1$ kaj $y \geq 0$

Ni prezentu grafike ĉi malegalaĵojn.

Konforme al la teorio, la valoroj de x kaj y kontentigas ĉiuj kondiĉojn nur
sur la limpunktojn de la grafikaĵo. La profito esprimiĝas per la funkcio $(3x + 7y)$.
Do ni nun kontrolu la valorojn de ĉi funkcio sur la limpunktoj:

Por $(1; 1)$ ni havas $3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 10$

Por $(1; 6)$ ni havas $3 \cdot 1 + 7 \cdot 6 = 45$

Por $(5; 5)$ ni havas $3 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 50$

Por $(5; 6)$ ni havas $3 \cdot 5 + 7 \cdot 6 = 57$.

Kompreneble 57 indikas la maksimuman profiton

Respondo: La fabriko devas produkti 5 unoj el A kaj 6 unoj el B ĉiutage.

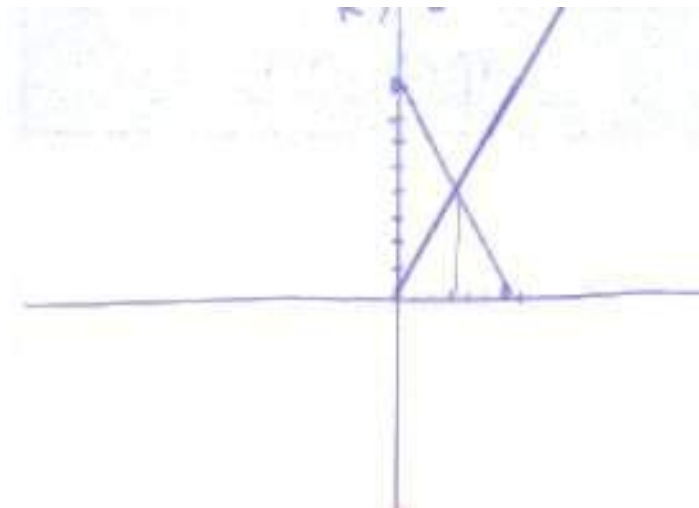
Oferto kaj demando

- Se oni scias la funkcion de la oferto kaj demando, desegnite ilian grafikon, ni povas trovi la punkton kie ambaŭ ili koincidas

Ekzemple

La demando $K = -\frac{4}{3}x + 80$ dum oferto $O = \frac{4}{3}x$ donos en la grafiko intersekcio sur la punkto $(10/3; 40)$. Kompreneble kontraŭ la prezo, 30 ni akiros la maksimumajn vendojn.

Vidu la grafikon



La lineara programado

Vagono kun karbo

- En termostacio funkcianta per karbo oni alportis 500 tunoj da karbo per tri specoj de kamionoj je kapacitoj respektive 15, 20 kaj 30 tunoj. Ĉu vi povas trovi kiom estas la nombro de ĉiu speco de kamionoj?

Respondo:

2 vagonoj el 15 tunoj, 1 vagono el 20 tunoj kaj 15 vagonoj el 30 tunoj. Ĉar $2 \times 15 + 1 \times 20 + 15 \times 30 = 500$ tunoj.

Bioritmoj kaj modulo - ekvacioj

Ĉiu homo havas tri internajn ritmojn ripeteblaj periodece, ekde sia naskiĝo.

Ĉi tiuj jenas:

Fizika ciklo ĉiun 23an tagon.

Emocia - biologia ciklo ripetebla ĉiun 28an tagon.

Intelektala ciklo ĉiun 33an tagon.

Ĉiu ciklo similas al sinusoido kiu havas supran kaj malsupran branĉon samkiel iun ekvilibrantan, tranzitan punkton.

Elkalkulinte la nombron de la tagoj ekde la naskiĝo ni povas konstrui sinusoidon por unu ciklo kaj povas trovi ankaŭ la fizikan staton, la emocia - biologian staton kaj tiun intelektan aktualan.

Por la fizika ciklo trovi la pli malgrandan entjeron x tian ke la nombro de la tagoj koincidu al x laŭ la modulo 23. Se x rezultiĝas 0 vi estas travivante la tranzitan periodon, se x rezultiĝas ekz. ĉirkaŭ 6, vi troviĝas surkulmine, se x rezultiĝas 17, 18, vi troviĝas en la falanta stadio.

La respektivaj ekvacioj pri emociaj kaj intelektaj cikloj estas

Nombro de la tagoj $\equiv x \pmod{28}$

Nombro de la tagoj $\equiv x \pmod{33}$

Adiciante tri grafikaĵojn ni obtenas grandan sinusoidon donanta ĝenerale nian humoron en ĉi periodo.

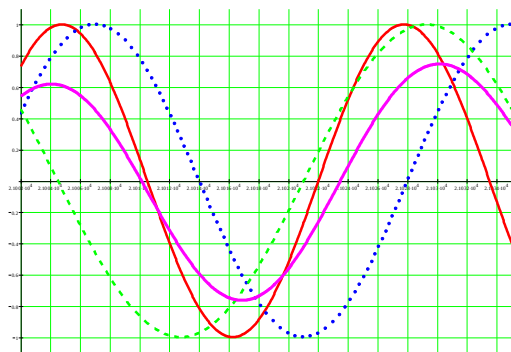
Vidu la grafikon

Fizika ciklo 

Emocia ciklo 

Intelektala ciklo 

La ĝenerala humoro 



24. 02 28 04. 03 08 12 16 20 24 28

Noto: ni ekiru de 24a de februaro

Apliko de matricoj

Matricoj estas tabeloj el nombroj, en kelkaj vicoj kaj kolonoj.

- **Dolĉaĵejo**

Iu dolĉaĵejo apud somera kinejo vendas bonbonojn, semojn kaj dolĉajn trinkaĵojn. La spektakloj okazas je la horoj 6, 8, 10.

La enspezoj certiĝas laŭ la suba tabelo:

Horo	Bombono	Semoj	Trinkaĵoj
6	-	10	6.5
8	9	15	12
10	4	7	8

Alian tagon povas esti alia tabelo simila. Adiciinte la nombrojn ni obtenas la enspezojn por du tagoj.

Ni povas kompili ankaŭ alian tabelon rilate la efikon de la dieto al la pezo de grupo de viroj kaj virinoj antaŭ kaj post la dieto.

160 158 172 193 Viroj antaŭ dieto
132 143 119 157 Virinoj

154 148 163 178 Viroj post dieto
132 154 112 136 Virinoj

Ekzemplo pri la multipliko de matricoj

Oni konstruas du specojn de domoj, klasikaj kaj modernaj kaj por ĉiu el ili oni ofertas du modelojn.

Moderna Klasika

Matrico X

Indikas la nombron de la konstruitaj domoj

10	15	modelo A
15	20	modelo B

Matrico Y

Indikas la lignajn unuojn necesaj por ĉiu modelo

2	Moderna
3	Klasika

Por trovi la entutan nombron de la lignaj unuoj necesaj por ĉiuj domoj laŭ modelo A ni elkalkuli kiel jene: $10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 20 + 45 = 65$, kio povas akiriĝi ankaŭ multiplikante la matricojn X kaj Y (la unua vico), samtiel por la modelo B: $15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 90$

Se kun la matrico **Z** ni prezentas la unuojn de la necesaj tegoloj

3
4

Ni povas elkalkuli kiom da unoj da tegoloj necesas por ambaŭ modeloj

- **La bakejo**

Iu bakejo vendas dolĉajn bulketojn, panetojn, krespojn kaj flanojn. La nombro de la ĉefaj ingrediencoj necesaj por ĉiu artiklo prezentiĝas en la jena matrico:

Matrico A

1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	Dolĉaj bulketoj
0	3	0	$\frac{1}{4}$	0	Panoj
4	3	2	1	1	Krespoj
0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	Flanoj

La kosto por ĉiu unuo de ĉiu ingredienco pokvante kaj po malkvante prezentiĝas de

Matrico B

Pokvante	Po malkvante	
5	5	ovoj
8	10	faruno
10	12	sukero
12	15	aldonaĵoj
5	6	lakto

Multiplikante ambaŭ matricojn ni povas elkalkuli la kostojn por la artikloj ofertataj de la bakejo laŭ du eblecoj.

Teorio de ludoj

Matricoj estas vaste uzataj en teorio de la ludoj (ekde la jaro 1944 de John Neumann kaj Oscar Morgensten). Ĉi teorio aplikiĝis en militistaj aferoj, poste en ekonomio ka.

Por kompreni ĝin ni donu kelkaj simplajn ekzemplojn

Ludo kun du personoj

Ni priksideru matricon 2×2 . La ludanto A elektas unu vicon en ĝi dum la alia tuj poste unu kolonon. Tia elekto nomiĝas **strategio**.

Nun nirimarku kiu estas la numero de intersekcio de vico kun kolono. Se tiu numero estas pozitiva A profitas tiom da poentoj kiom notas la numero. Se ĝi estas negativa B profitas tiom da poentoj. Vidu la jenan matricon:

2	- 1
- 3	4

Ĉi tie se A elektas la duan vicon, poste B elektas la unuan kolonon, la intersekcia numero estas - 3, do B gajnas 3 poentoj.

Dum en la suba matrico:

- 3	- 6	10
3	0	- 1
5	- 4	- 8

Se B elektas la duan kolonon, dum A elektas la duan vicon, tiam la intersekcia numero estas 0, do la ludo rezultiĝas egala.

Gravas ke oni pristudu la matricon anticipe por ke antaŭvidu la eblajn movojn de la kontraŭanto, post kiam vi estus elektinta iun vicon aŭ kolonon. Do gravas la kombinaĵo de la strategioj de ambaŭ ludantoj.

Pripensu ke antaŭ vi staras matrico $m \times n$ kun multaj vicoj kaj multaj kolonoj. Ĉi kaze la ludo komplikiĝas ĉar la elektoeblecoj plimultiĝas.

La teorio de la ludoj klopodas ĝuste difini la strategiojn laŭ kiuj la ludanto gajnos. Tiu kiu komencas la unua la ludon devas antaŭkalkuli la minimuman perdon eventualan por si. Ekzemple en la matrico:

- 6	10
0	1
- 4	- 8

La ludanto A devas elekti la duan vicon ĉar tie estas nur 0 kaj 1, tio estas, li aŭ tute ne perdas aŭ gajnas 1 poenton post la elekto fare de B. Se ludanto A elektus la unuan vicon certe li perdus aŭ 6 aŭ 10 poentoj, dum se li elektus la trian vicon, certe li perdus aŭ 4, aŭ 8 poentoj.

En la matrico:

- 7	8	- 1
4	7	0
- 9	3	- 6

La pli grandajn perdojn por la ludanto A je kiu ajn elektota strategio de li, estos 7, aŭ 0, aŭ 9. Por ke li minimizi la ekspektitan maksimalan perdon li devas elekti la duan vicon (strategion 2). Sammaniere, la pli grandaj perdoj por la ludanto B estas 4, aŭ 8, aŭ 0. Li do devas elekti la trian kolonon (strategion 3) por ke minimizu siajn perdojn. Ĉi kaze la pago estos 0. (strategio 2 por A kaj strategio 3 por B) kio nomiĝas **valoro de la ludo**.

La paro de strategioj (2, 3) difinita de la **kriterio de minimakso**, nomiĝas la **skalara punkto** de la ludo.

Ĉi tie la valoro de la ludo estas samtempe minimumo en la sia vico kaj maksimumo en la sia kolono. Ĉi fakto igas la skalaran punkton trovebla facilmaniere se ĝi envere ekzistus.

En la matrico:

2	2
0	4
1	6
2	7

La skalara punkto estas (4, 1) kaj la valoro de la ludo estas 3.

Se eksiats 2 aŭ pli da skalaraj punktoj ili konsideriĝas egalaj. Malbonŝance ne ĉiu ludo havas skalaran punkton.

Kiam ĉi tio okazas, ambaŭ ludantoj uzas alian metodon. Ili miksas la strategiojn. Ĉi miksado devas estiĝi konforme al la probablo anticipe difinita. Ekz. se la ludanto havas nur du strategiojn kaj decidis elekti laŭ probablo, tion li povus fari ĵetante moneron. Estas sciite ke estas du eblecoj kun la monero, kiuj reprezentus ambaŭ strategiojn. Se eksistas pli da strategioj li povus uzi ĵetkubon aŭ alian metodon.

Ni notu la probablon de la gajno per x kaj de la malgajno per $(1 - x)$. Ni notu la poentoj m kaj n respektive. Tiam la valoro de la ludo rezultiĝus:

$$mx + n(1 - x)$$

Ekzerco

Ludas du personoj. Ili ĵetas ĉiu po unu monero. Se ambaŭ moneroj rezultiĝus samflankaj gajnas A unu dolaron, alie gajnas B unu dolaron. Vidu la matricon:

1	- 1
- 1	1

Ambaŭ ludantoj devas elekti kiun ajn strategion je probablo $\frac{1}{2}$

$$\text{Ni havs } \frac{1}{2} * 1 + 1/ * (- 1) = 0$$

Do la valoro de la ludo estas 0, estas ja ludo profitebla.

- **Psikologia laboratorio**

En iu psikologia laboratorio kiu uzas musojn por eksperimentoj oni disponas pri 17 unuoj da tritiko kaj 24 unuoj da aveno ĉiutage. Unu griza muso manĝas 2 unuojn da tritiko kaj tri unuoj da aveno ĉiutage; dum unu blanka muso manĝas 3 unuoj da tritiko kaj 4 unuoj da aveno. Kiom da musoj povas elteni la laboratorio per tiu taga rezervo de nutraĵoj.

Solvo

x grizaj musoj

y blankaj musoj

$$3x + 3y = 17 \quad \text{tritiko}$$

$$3x + 4y = 24 \quad \text{aveno}$$

Ni transformu la matricon

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 17 \\ 3 & 4 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3/2 & 17/2 \\ 3 & 4 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3/2 & 17/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3/2 & 17/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Kio montras ke

$$x = 4 \text{ dhe } y = 3$$

Aplikoj de teorio pri derivaĵo

Optimizigo de la procesoj

Unu el la mirindaj aplikoj de matematiko, aparte de tiu “supera” (diferenciala kaj integrala kalkulo) estas la difino de la kondiĉoj pri kiuj per minimumaj elspezoj oni popvas certigi maksimuman ekspluaton de la fontoj, aŭ maksimuman profiton.

Ekz. se ni notas per C la koston, per R la enspezojn tiam la entuta profito estus $P = R - C$

Ni supozu ke surbaze de multjaraj observadoj rezultiĝis ĉi tiu formulo pri la enspezoj:

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$$

R esprimiĝas en dolaroj, x indikas la kvanton de la produktoj.

Ni demandas: kioma devas esti x por ke ni obtenu maksimumon de la profito?

Solvo

Unue ni difinu la kampon kie estas difinita x , kio estas $[0, 546]$ (546 rezultiĝas kiam ni egaligas $y = 0$)

$$\text{Tiam la derivaĵo } R' = -3x^2 + 900x + 52.500$$

Post egaligo de ĝi al nul ni faktORIZU la maldekstran flankon

$$(-x + 350)(x + 50) = 0$$

De kie rezultiĝas pozitiva solvaĵo $x = 350$

Nun ni enkonduku alian koncepton:

Averaĝan funkcion de la kosto $C^{\wedge} = C / x$

Trovu la maksimumon de la averaĝa kosto se $C = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$

Tio estas trovu la nivelon de la produktado kiu minimizas la koston por unuo. Komparu tion kun la averaĝa kosto kiam la produkto atingas $x = 400$ unuoj.

Solvo

$$C^{\wedge} = [800 + 0.04x + 0.0002x^2] / x = 800/x + 0.04 + 0.0002x$$

Ĉi tie $x > 0$

$$\text{Tiam } C' = -800 / x^2 + 0.0002 = 0$$

$$x^2 = 800 / 0.0002 = 4\,000\,000$$

La pozitiva solvaĵo $x = 2000$

$$\text{Tiam } C = 800 / 2000 + 0.04 + 0.0002 \cdot 2000 = 0.84 \text{ dolaroj}$$

Do, por 400 unuoj de produkt la averaĝa kosto por unuo estos

$$C = 800 / 400 + 0.04 + 0.0002 \cdot 400 = 2.12 \text{ dolaroj}$$

La maksimalaj enspezoj

Iu bizneso vendas 2000 artikloj ene de monato je prezo 10 dolaroj po unuo. Sed ĝi povas vendi pli, je ĉiu malaltiĝo de la prezo je 0.25 \$ la nombro de vendotaj artikloj altiĝas je 2500. Tio multobliĝas kiomfoje malpliĝas la prezo je 0.25 \$. Trovu la prezon en dolaroj pri kiu la enspezoj estus maksimumaj.

Solvo

Ni notu per x la nombron de la artikloj entute.

Per p la prezon por unu unuo.

Per R la monatajn enspezojn en dolaroj. Tiam $R = x p$

La nombro de la artikloj x rilatas al prezo p per la fakto ke x altiĝas je 250 unuoj kiamfoje la prezo falas 0.25 \$. Do, $x = 2000 + 250(10 - p) / 0.25 = 12000 - 1000p$ kie p estas la nova prezo.

Do, se ni malpliigas la prezon de 10\$ al p \$ aŭ $(10 - 0.25k)$ kie k natura nombro, la produktoj pliĝas je 250 k .

Do ni vendos $2000 + 250k$ artikloj je prezo $(10 - 0.25k)$.

$$10 - p = 0.25k \text{ (} p \text{ nova prezo) kaj } k = (10 - p) / 0.25$$

$$\text{Tiam } x = 12000 - 1000p$$

$$p = 12 - x / 1000$$

$$R = x(12 - x / 1000) = 12x - x^2 / 1000$$

La difina kampo de x estas $[0, 12000]$

$$R' = 12 - x / 500$$

Ni egaligu ĝin al nul.

$$\text{Rezultiĝas } x = 6000$$

$$\text{ATiam } p = 12 - 6000 / 1000 = 6 \text{ dolaroj}$$

$$\text{De } p = 12 - x / 1000 \text{ sekvas } x / 1000 = 12 - p = 12 - 6 = 6$$

$$x = 6000$$

La maksimuma profito

Ni notu per p la demandon pri certa produkto, ekz. $p = 50 / \sqrt{x}$

Kaj per C la koston, ni zupozu $C = 0.5x + 500$

Difinu pri kiu prezo p atingeblas la maksimuma profito?

Solvo

Ni notu per P la profiton.

$P = R - C$ kie R estas enspezoj

$R = xp$

$P = R - C = xp - (0.5x + 500) = x \cdot 50 / \sqrt{x} - (0.5x + 500) = 50 \sqrt{x} - 0.5x - 500$

La difinkampo por x estas $x > 7872$, (preter tio la profito rezultiĝus negativa)

Tiam $P' = 25 / \sqrt{x} - 0.5 = 0$

$\sqrt{x} = 25 / 0.5 = 50$

$x = 2500$

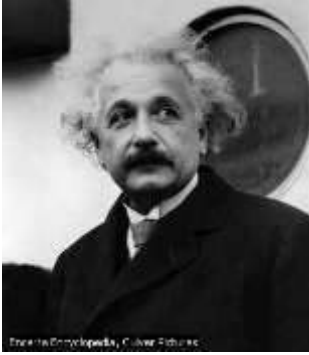
$p = 50 / \sqrt{2500} = 50 / 50 = 1$ dolaro

Aplikoj de teorio de probablo

La teorio pri probablo naskiĝis pro hazardludoj.

L. P. Lain estis motivigita solvi la problemon pri la momento kiam la ludanto devas interrompi la ludadon por ke li gajnu. Li utiligis la teorion pri probablo disvolvita unue de Pierre Fermat kaj Blaise Pascal (XVII jc)

La botanisto Robert Braun (XVIII jc.) observis la ĥaotikan moviĝon de la grajnetoj de poleno en akvo. Tiu moviĝo kompreneblis nur en la jaro 1905 de Albert Ajnŝtajn, pritraktinta la molekulajn moviĝojn kiel hazardan fenomenon.



Albert Einstein

La probablo kompreneblas kiel nombro inter 0 kaj 1 esprimanta la raporton de la favoreblaj kazoj rilate certan eventon kaj la ĝeneralan nombron de la provoj.

Ekzemplo

Se ni ĵetas 50 fojojn moneron kun du flankoj : Aglo kaj Leko, ni obtenos la jenajn eblajn kazojn:

a l / l l / l a / l a / a a / l a / l a / a l / l a / l l / a a / a l / l a / l a / a a / l l / a l / a a / l a / l l /
a l / l l / l a / l a / a l /

Kiel vidite, por la tuta serio de ĵetoj la probablo rezultiĝas $p = \frac{1}{2}$, sed tio ne veras se ni prikonsideras nur du unuajn ĵetojn.

Post du ĵetoj la raporto rezultiĝas $\frac{1}{3}$ kaj post 8 ĵetoj $\frac{3}{8}$ (vidu).

Se ni elkalkulas la raporton por ĉiuj du ĵetoj ni konstatos ke el 25 paroj, 16 rezultigus la raporton $\frac{1}{2}$

Do, oni parolas pri leĝoj de grandaj nombroj (Bernulli)

Regulo:

Por du eventoj A kaj B ni havas $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ por sendependaj eventoj

- **Problemo 1:** Trovu la probablon ke unu karto el hazarludo eltirita tute hazarde estu ruĝa aŭ kun figuro.

$$P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \quad p(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \quad p(R \cap F) = \frac{6}{52}$$

$$\text{Dum } P(R \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{3}{13} - \frac{3}{26} = \frac{8}{13}$$

- **Problemo 2:** Ni eltiru sinsekve du kartojn remetante ilin en la stakon, unu kun numero 5 kaj la alia kun figuro.

Evento A: koincidas 5 kaj figuro samtempe.

Evento B: karto kun figuro kaj numero 5

Respondo

$P(A) = \frac{4}{52} * \frac{12}{52} = \frac{3}{169}$ surbaze de la regulo pri produkto de sendependaj eventoj

$$P(B) = \frac{12}{52} * \frac{4}{52} = \frac{3}{169}$$

$$\text{Tiam } p(E) = p(A) + p(B) = \frac{3}{169} + \frac{3}{169} = \frac{6}{169}$$

- **Problemo 3:**

En iu kesto estas 10 globetoj el kiuj 4 kolorigitaj

a) **Evento E:** 3 kolorigitaj kaj 1 blanka (per remeto)

b) **Resto de la evento E** (malokazigo de la evento E)

Solvo

A)

E1 blanka globeto - kolorigita - kolorigita - kolorigita

E2 kolorigita, blanka, kolorigita, kolorigita

E3 kolorigita, kolorigita, blanka, kolorigita

E4 kolorigita, kolorigita, kolorigita blanka

$$\text{Tiam } p(E1) = \frac{6}{10} * \frac{4}{10} * \frac{4}{10} * \frac{4}{10} = \frac{24}{625}$$

$$P(E2) = \frac{4}{10} * \frac{6}{10} * \frac{4}{10} * \frac{4}{10} = \frac{24}{625}$$

$$P(E3) = \frac{4}{10} * \frac{4}{10} * \frac{6}{10} * \frac{4}{10} = \frac{24}{625}$$

$$P(E4) = \frac{4}{10} * \frac{4}{10} * \frac{4}{10} * \frac{6}{10} = \frac{24}{625}$$

$$P(E) = p(E1) + p(E2) + p(E3) + p(E4) = 4 * \frac{24}{625} = \frac{96}{625}$$

B)

La resto de E estas $(625 - 96)/625 = 529 / 625$

Loterio 6 el 40

Ni supozu ke el 40 nombroj oni devas elekti nur 6. Unu tia seso estas la gajninta loterio. Trovu la probablon de la gajno.

Solvo

Estas entute grupoj po 6 nombroj aŭ spaco de provoj $n(S) = C_{40}^6 = 3\,838\,380$
Tiam $p = n(A) / n(S) = 1 / 3\,838\,380 = 0.00000026$

- **Kondiĉita probablo**

Se ni eltiras, ni diru, sinsekve du korojn neremetante, tiam la probablo estas kondiĉita.

Tiel, dua koro kondiĉitas de la unua.

Aŭ koncerne la viv - asekurecon. Kompanio de asekurecoj difinas la skalojn de la pagoj prikonsiderinte la fakton ke la aĝo kaj probablo estas interdependentaj kaj interkondiĉitaj.

Ni supozu ke por la aĝo 21 jara la probablo de morto estas 0.001, dum por la aĝo 64 jara tio estas notinde pli granda, 0.025.

Formulo: $p(E2/E1) = p(E1 \cap E2) / p(E1)$

Ni returniĝi al la problemo de du koroj.

Unua kazo: remetante

Se la unua karto ne estas koro, tiam $p(E1) = 13/52$ dhe $p(E2) = 13/52$

Sekve

$$p(E1 \cap E2) = p(E1) * p(E2) = 13/52 * 13/52 = 0.0625$$

Dua kazo: ne remetante

$$P(E1 \cap E2) = p(E1) * p(E2/E1) = 13/52 * 12/52 = 0.0588$$

Alia ekzemplo

- **Moneroj**

*Oni ĵetis 2 monerojn kaj estas sciite ke almenaŭ unu el ili indikas Leko.
Kioma estas la probablo ke ambaŭ moneroj falu kun Leko?*

Solvo

Elementaj eventoj:

E1 almenaŭ unu estas Leko (L L; L A; A L)

E2 ambaŭ estas Leko (L L)

Tiam: $P(E2/E1) = \frac{1}{4} / \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

Ekzemplo

Loĝantoj de la domego

En iu domego loĝas 20 solecaj homoj (8 viroj kaj 12 virinoj). 3 viroj kaj 8 virinoj estas laboristoj. Ĉiuj ceteraj estas studentoj. Unu loĝanta eliras el la domego.

Evento A: ĉi tiu estas virino

Evento B: ĉi tiu estas studento

Evento C: ĉi tiu estas virino studento

Evento D: ĉi tiu estas viro laboristo

Evento E: ĉi tiu estas studento virino

Trovu probablon ĉiukaze!

Solvo

Tabelo de klasifikado			
	Studento S	Laboristo L	
Viro V	5	3	8
Virino I	4/9	8/11	12/20

$$P(I) = 12/20 = 3/5$$

$$P(S) = 9/20$$

$$P(I \cap S) = 4/20 = 1/5$$

$$P(V/L) = 3/11$$

$$P(S/I) = 4/12 = 1/3$$

La efiko de la reklamo

Kompanio de televidiuloj aranĝis promocion por la novaj siaj produktoj. La reklamo aperis kelkaj samajnoj sur la medio. Por ke eksciu ties efikon al la vendoj la kompanio aranĝis enketadon. Oni demandis personojn kiuj estis konatiĝintaj per la reklamo kaj personojn kiuj ankoraŭ ne estis konatiĝintaj. Oni notis per A la aron de la unua grupo de personoj kaj per B la duan grupon de personoj kiuj estis aĉetintaj la televidilon. Tiam $A \cap B$ reprezentas la personojn kiuj estas vidinta la reklamon kaj estas aĉetintaj la televidilon. Danke al la observado rezultiĝis ke

$$p(A) = 0.38$$

$$p(B) = 0.15$$

$$p(A/B) = 0.10$$

$$\text{Tiam } p(A/B) = p(A \cap B) / p(A) = 0.10 / 0.38 = 0.26$$

$$p(A/B) = p(A \cap B) / p(B) = 0.10 / 0.15 = 0.67$$

Nun difinu mem la probablon ke iu persono vidinta la reklamon estas aĉetinte la televidilon.

Solvo

$$p(B/A) = 0.26$$

Difinu la probablon ke la persono ne vidis la reklamon tamen li aĉetis la televidilon.

$$p(B/A) = p(A' \cap B) / p(A') = [p(B) - p(A \cap B)] / [1 - p(A)] = [0.15 - 0.10] / [1 - 0.38] = 0.05 / 0.62 = 0.08$$

Ĉi tie A' montras la personojn kiuj ne estas vidintaj la reklamon.

Kiel vidite, rezultiĝs trifoje malpli!

La ekspektitaj valoroj

Ĝenerale la ekspektita valoro akiritas per la formulo:

$\sum X_i p(X_i)$ kie X_i estas la avloroj akiritaj certa kvanto X kaj $p(X_i)$ la koncernaj valoroj de probabloj.

Ekzemplo:

- **La nombro de knaboj**

Iu familio havas 3 infanoj. Trovu la ekspektitan nombron de knaboj.

La spaco de eventoj: (V - knabino, D - knabo), VVV; VVD; VDV; DVV; VDD; DVD; DDV; DDD

Nombro de la knaboj	Probablo	
0	1/8	$0 \cdot 1/8 = 0$
1	3/8	$1 \cdot 3/8 = 3/8$
2	3/8	$2 \cdot 3/8 = 6/8$
3	1/8	$3 \cdot 3/8 = 9/8$
Ekspektita valoro		$12/8 = 3/2$

Ekspektita valoro $12/8 = 3/2$

La ekspektita valoro estas ia averaĝo de la diversaj valoroj kiuj povas okazi. Se ni prikonsideras la nombron de la knaboj en multaj familioj kun tri infanoj, tiam konforme al la leĝo de grandaj nombroj, kiom multe da familioj ni observu, tiom pli certas la averaĝa valoro de niaj observoj estos pli proksima al la ekspektita valoro.

Ekzemploj kun ludoj

- **Ludo 1**

Iu ludanto pagas 1 L por ĵeti la kubeton unu foje. Se la kubeto haltas ĉe la numero 6 li rekompenciĝas per 5 L (la profito estos $5 - 1 = 4$ L).

*Se la kubeto haltas ĉe la alia numero la ludanto ne rekompenciĝas.
Trovu la ekspektan profiton de ĉi ludo.*

Numero	Pago	Gajno	Probablo	Produkto $X_i \cdot p(X_i)$
6	5	4	1/6	4/6
1 – 5	0	- 1	5/6	- 5/6
La ekspektita valoro - 1/6 L = - 0. 17 L				

Do, se ni ludus multfoje rezultiĝus pli da perdo ol gajno, averaĝe por ĉiu ludo 0. 17 L, kvankam en apartaj ludoj ni eĉ gajnus.
Por 100 ludoj ni pedus $100 \cdot 0. 17 = 17$ L

- **Ludo 2**

Iu ludo kostas 1 L por ĉiu ĵeto, sed estas ankaŭ la kondiĉo: ni gajnus 3 L por la numero 6, 2 Lekoj por la numero 5, 1 Leko por la numero 4, 0 Lekoj por la ceteraj numeroj. Ĉu tiu ludo estas profitdona?

Numero	Pago	Gajno	Probablo	Produkto
1 – 3	0	- 1	3/6	- 3/6
4	1	0	1/6	0
5	2	1	1/6	1/6
6	3	2	1/6	2/6
Ekspekto = 0				

La ekspekto estas 0 Lekoj. Ĉi tiu ludo konsideriĝas “justa”.

Banko kaj mondeponoj

- **Mondeponoj laŭ limdato**

Multaj problemoj rilatas al la monŝparoj de homoj deponataj en la bankoj kontraŭ certa interezo.

Por elkalkuli kiom da mono estiĝos en banko se ni enmetos tie regule certan kvanton, oni uzas ĉi formulon:

$$A = D \{ [(1 + i)^n - 1] / i \}$$

A estas la sumo ricevota post n periodoj, i estas la interezo por la periodo, D estas la unika monsumo.

- Tiel, se mi deponas ĉiun trian monaton po 250 Lekoj je jara interezo 6% dum tri jaroj kiom da mono estiĝos en la banko?



Solvo

Ni havas $D = 250$, $i = 6/4 = 1.5\%$, $n = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ trimonatoj (estas deponita ankaŭ la mondeponaĵo kiu ne akiras interezon)

$$A = 250 \{[(1 + 0.015)^{13} - 1] / 0.015\} = 3560 \text{ L}$$

Noto: se mi savus ĉi monon enhejme mi akirus malpli -

Envere ni ricevus entute: $(3 \cdot 4 + 1) \cdot 250 = 3250$ Lekoj, do $3560 - 3250 = 310$ L

Sem i pagus ĉiun monaton po 200 euroj je jara interezo 6% dum 30 jaroj kiom da mono estiĝus?

Solvo

Ĉi tie $n = 30 \cdot 12 + 1 = 361$; $i = 0.015$; $D = 200$

Ni apliku la formulon:

$$A = 200 \{[(1 + 0.015)^{361} - 1] / 0.015\} = 202107.52 \text{ euro}$$

Partopago por aĉeti aŭton

Ni supozu ke mi aĉetos aŭton je valoro 35 000 euroj post 10 jaroj. Kiom da mono mi devas deponi en banko je jara interezo 6% por ke mi certigu post 10 jaroj la sumon 35000 euroj?



Solvo

Ni havas $A = 35\,000$; $i = 0.015$; $n = 10 \cdot 4 + 1 = 41$

Nun ni apliku la supran formulon

$$D = A \cdot i / [(1 + i)^n - 1] = 35\,000 \cdot 0.015 / [(1 + 0.015)^{41} - 1] = 624.42 \text{ euroj.}$$

Partopago por aĉeti televidilon

Por aĉeti televidilon aŭ impianton stereo je valoro 1000 euroj



Solvo

Ĉifoje ni deponu ĉiumonate monon je jara interezo 6%. La donitaĵoj jenas: $n = 2 \cdot 12 + 1 = 25$, $A = 1000$ kaj $i = 0.015$

Simile ni ricevos:

$$D = 1000 \cdot 0.015 / [(1 + 0.015)^{25} - 1] = 37.65 \text{ euroj}$$

Anticipa mondepono en banko

(Por fari periodikan mondeponon)

Ni supozu ke mi bezonus 3000 euroj ĉiun trimonaton dum 12 sinsekvaj jaroj. Kiom da mono mi devas deponi je interezo en banko por ke ĝi liveru al mi periodike ĉi sumon?

Solvo

Ĉi tie $P = 3000$ euroj; $i = 0.015$ se la jara interezo estas 6%; $n = 12 \cdot 4 = 48$ trimonatoj.

La koncerna formulo jenas:

$$P_v = P \{ [1 - (1 + i)^{-n}] / i \}$$

Anstataŭinte, ni obtenos:

$$P_v = 3000 \{ [1 - (1 + 0.015)^{-48}] / 0.015 \} = 102127.88 \text{ euroj.}$$

Nota: Se mi ne disponus pri la mondepono en banko, tiam mi elspezus dum 48 trimonatoj $48 \cdot 3000 = 144\,000$ euroj aŭ $(144\,000 - 102127) = 41\,873$ euroj pli!

La familia stipendio

Ni supozu ke iu familio lernigas sian filon eksterlande dum ok sinsekvaj jaroj pagante ĉiujare 5000 eŭroj por la elspezoj, studkotizo, sana asekureco ktp de sia infano. Se ĝi sendas la monon ĉiujare, entute la pago estus $5000 \cdot 8 = 40\,000$ euroj. Sed ĝi povas notinde ŝpari se anticipe mondeponas en banko ĉiun trimonaton 1250 eŭroj je jara interezo 8% . Kial do?

Envere, ĉikaze $P = 1250$ euroj; $i = 2\% = 0.02$; $n = 32$

Tiam

$$P = P_v \{ [1 - (1 + i)^{-n}] / i \} = 1250 \{ [1 - (1.02)^{-32}] / 0.02 \} = 29335.38 \text{ euro aŭ}$$

$$(40000 - 29335) = 10625 \text{ euroj malpli!}$$

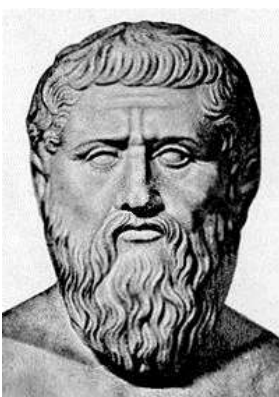
Dialektiko en la matematiko²⁸

Dialektiko komprenatas kiel la arto de logika rezonado, obteno de konkludoj rezonante logike, uiligante la kontraŭdiraĵojn en la penso, ankaŭ kiel la arto de logikaj diskutoj, ks. Estas ja famaj la debatoj Platono - Sokrato kie okulfrapas notinde la esenco de la dialektika pensado. Aristoklo diris ke dialektiko estas inventita de Zenono el Eleas (Suda Italio) famiĝinta pro liaj paradoksoj (vidu pli supre en ĉi libro). Praa Heraklito diris ke “oni eĉ ne povas pluski en la samaj akvoj de la rivero, ĉar ĝi senĉese fluadas”.



Heraklito (535 - 475 antaŭ Kristo)

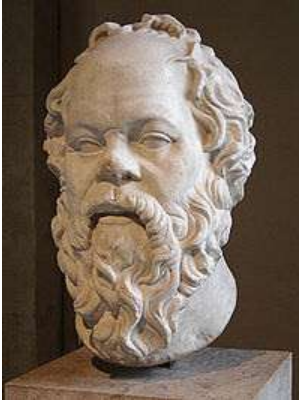
Platono kompletigis lian diraĵon dirante ke “ĉio fluadas senĉese, sendepende de fakto kiel ĝi aperas antaŭ niaj sensoj”.



Platono (428 - 348 antaŭ Kristo)

Dialektiko disvolviĝis multe de Sokrato kiu malkovris la verojn pere de demandoj plene de kontraŭecoj kiujn li direktis al la kunkonversaciantoj.

²⁸ Artikolo publikigita en la lingvo Esperanto en la revuo “Internacia Pedagogia Revuo”, 2007



Sokrato (469 - 399 antaŭ Kristo)

Hodiaŭ dialektiko komprenatas kiel tuteco de principoj de la pensado kaj rezonado resumigitaj en ĉi jenaj leĝoj:

La leĝo pri kontraŭeca karaktero de ĉio enmonde.

La leĝo de la moviĝo kaj ŝanĝiĝo senĉesa de ĉio enmonde.

La leĝo de neado de neado.

La leĝo de transpaso de kvanto al kvalito

La leĝo de la progresiva evoluo je formo de spiralo

Dialektiko estas sendube potenca ĝeneraligo de la ordinara formala logiko posedata de homo kaj uzata de li en ĉiutagaj rezonadoj, kie okulfrapas precipe la leĝo de la ekskudita trio: el du kontraŭaj asertoj pri la sama objekto kaj momento veras nur unu, la alia malveras. Ekz. el du asertoj: “Mi estas hejme” kaj “Mi ne estas hejme”, certe veras nur unu!

Sed la formala logiko estas malpotenca solvi eksterordinarajn situaciojn kie povas troviĝi la homo. Tial iu filozofo²⁹ estas skribinta ke “la formala logiko similas al tiu ĉastema sinjorino ene de siaj hejmaj muroj, kiu travivas plej strangajn kaj surprizigajn aventurojn ĵus kiam ŝi eliras ekster tiuj muroj”.

Ni ilustru ĉi tion per ekzemplo - anekdoto cirkulanta en la studentaj rondoj:

Iun pluvegan tagon, juna viro veturis per sia aŭto malgranda dusidloka. Preterpasante busstacion fore de la urbo li distingas inter la homoj atendantaj tie tri personojn specialajn: maljunulinon aspektanta tre malsana; faman kuraciston kiu iam estis savinta al li la vivon per operacio; kaj belulinon - modelulinon pri ku li ofte revis kaj songis. Kiun el ĉi tiuj personoj li invitu al sia aŭto?

²⁹ Fridrih Engels

La formala logiko operacius per analizo de la personoj aparte, laŭ kio indus inviti ankaŭ la malsanan maljunulinon pro humanitaraj kialoj; ankaŭ la kuraciston pro dankemo kaj morala sindevigo; ankaŭ la modelulinon kiu reprezentis sonĝon por la juna viro. . Sed la solvo eliras ekster la kadron de la formala logiko. La juna viro elaŭtiĝas, enmanigas la ŝlosilon al la kuracisto atendanta en la busstacio, petante lin akompani per sia aŭto la maljunulinon al la hospitalo, kaj mem restas atendi kun la modelulino, komencante belan konversacion kun ŝi kaj atendante la sekvan linian buson. Nia popolo delonge estas malkovrinte la dialektikon de la vivo, kio estas esprimita per multaj proverboj kaj saĝaj vortoj. Ni rememorigu Nastradinon³⁰ kiu kiomfoje malsupreniris, ploris ĉar rememorante ke li devus denove supreniri la skalojn. .



Nastradino surzeniĝis maloportune. .

Ĉu dialekiko speguliĝas ankaŭ en matematiko? Certe jes!

En matematiko, komencante de tiu elementa, oni renkontas konceptojn kaj operaciojn kontraŭaj unu al la alia, kiel pluso kaj minuso, multipliko kaj divido, potencigo kaj elradikiĝo, eksponencigo kaj logaritmigo, diferencigo kaj integrigo, analizo kaj sintezo.

Se ni estigas du kontraŭajn operaciojn, tio estas, realigas du sinsekvajn neadojn, ni alvenos al la inica esprimaĵo.

Ekzemple $\sqrt{a^2} = a$ por $a > 0$, do la dua radiko de kvadrato donas mem a ;

Inverse, $(\sqrt{a})^2 = a$ do la kvadrato de la dua radiko donas mem a .

La produkto de du negativaj nombroj donas pozitivan nombron $(-)(-) = +$.

La inverso de la inverso donas mem la nombron: $1/(1/a) = a$.

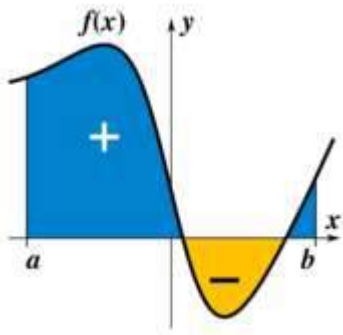
Logaritmo je bazo a de la x - potenco donas mem x : $\text{Log}_a a^x = x$

³⁰ Popola sagxulo

La potenco de bazo je logaritmo je bazo a , donas mem x : $a^{\log_a x} = x$.

Diferencialo de integralo de $f(x)$ donas $f(x)$: $d \int f(x) dx = f(x)$.

Integralo de diferencalo de $f(x)$ donas denove $f(x)$: $\int d(fx) = f(x)$.



La supraj ekzemploj atestas pri la ago de la leĝo de neado de neado.

La historio de la evoluo de matematika penso estas fakte dialektika evoluo de konceptoj, metodoj, teorioj ekde la antikveco ĝis hodiaŭaj tagoj.



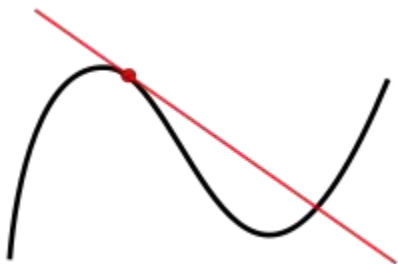
Se la matematiko tiel nomata elementa, temas pri la konstantaj grandoj, la matematiko de tri lastaj jarcentoj, matematika analizo aŭ Diferenciala kaj Integrala Kalkulo, formigita de Njutono kaj Lajbnico speguligis tion plene kaj precize.



Bulgara libro pri Nastradino

La ideo de la sendependa kaj dependa variabloj eniris vaste en matematikon kaj trovis poste sennombrajn aplikojn en aliaj naturaj, sociaj sciencoj samtiel en tekniko.

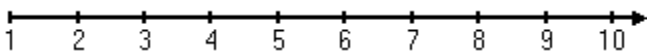
La koncepto de derivaĵo kiel rapidecon de la ŝanĝiĝo de la funkcio depende de argumento spegulas ĝuste ĉi dialekton de la kozoj.



Samtiel la konceptoj de la grandoj senfine etaj kaj senfine egaj, limeso, ktp.

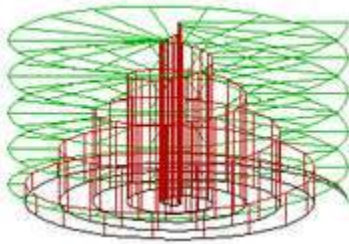
Ankaŭ en matematiko la konceptoj havas sian historion de naskiĝo, evoluiĝo kaj perfektiĝo, ĝeneraliĝo. Ni prikonsideru ekz. la nombron.

Komence ĝi esprimis komunan karakterizaĵon de la diversaj gupoj de objektoj kiuj povis enordiĝi en kunkorespondado unu al unu. Tiel, al ĉiuj grupoj je tiom da elementoj kiom estas la fingroj de la mano korespondis la nombro kvin. Tiuj kun tiom da elementoj kiom estas la piedoj de la kato, korespondis al kvar. Kas simile. Ĉi tiuj estis ja la nuaj nombroj aŭ naturaj nombroj.



La divido de la objektoj en partojn helpis al la naskiĝo de la ideo de frakcio. Sed tro malfrue oni komprenis ke devas ekzisti ankaŭ aliaj nombroj malpli konkretaj kaj pli imageblaj kiel tiuj negativaj. Tiuj servis por indiki ekzemple la ŝuldon kontraŭ la riĉaĵon, perdojn kontraŭ la profitojn ks. Intere

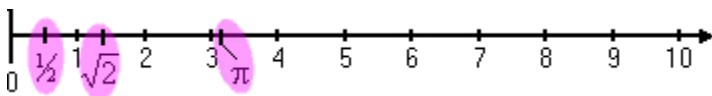
staris nulo kiu kun la pozitivaj kaj negativaj frakcioj formas la novan plilarĝigitan aron de de raciaj nombroj.



Spiralo laŭ la imago de Arkimedo

Kiam matematikistoj renkontiĝis kun la raporto de diagonalo de kvadrato al ties eĝo, ili komprenis ke ne temis pri frakcio, nek pri segmento kunmezurebla, tio estas ke la eĝo de kvadrato eniru je frakcia nombro da fojoj ĉe diagonalo, ni supozu $3 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{5}{1000} + \dots$ ĝis kiam rezultiĝu kiel oni diras ia decimala nombro periodika, ni supozu 3.235177777... aŭ 3.2351787878...

Sed la nova raporto esprimis nombron je nova speco nomata iracia kiu reprezentis aron sufiĉe pli larĝa ol tiu racia. Tiel, la aro de nombroj plilarĝiĝis kaj renomiĝis “reela nombro” kiu fakte tute kovris nun la numeran akson.



Estas sciite ke la aro de ordigitaj paroj de reelaj nombroj formas la aron de la kompleksaj nombroj $a + bi$ kiu siaflanke estas plua plilarĝiĝo de reelaj nombroj. Tiu ĉi proceso daŭras kaj samtempe esprimas la ideon de la progresiva evoluo de iu ĉenero de la spiralo al alia pli alta de ĝi.

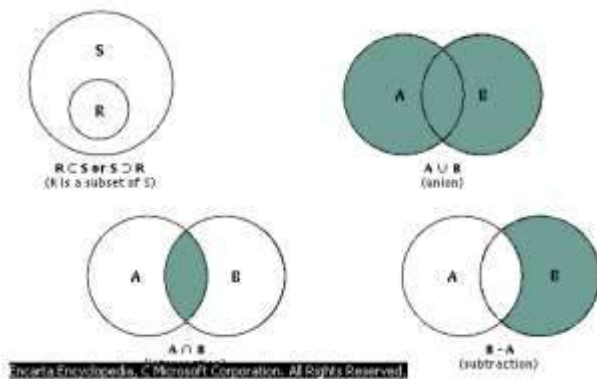
N 2, 5, 1000, 198790 ktp

Z 8; - 7; 0; 2000, - 45000

Q $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{100}$, - $\frac{2}{7}$, 0.56; 2, 455555. .

R Π , - 4, $\frac{2}{9}$; 3.57, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{8}$, e , $2 - \sqrt{3}$

K $2 + 5i$; $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-8}$, $2(\cos 20 + i \sin 20)$



Nature, oni ekspektis ke la novaj aroj, konservante la ecojn de la inicaĵoj el kiuj li startiĝis, havu ankaŭ novajn ecojn, tio estas la kvantaj ŝanĝiĝoj alportas kvalitajn ŝanĝiĝojn. Tiel, por naturaj nombroj ne ĉiam pravas la operacio de la substrahado, ĉar $7 - 10$ ne donas naturan nombron kio ne okazas kun la aro de la entjeroj $\mathbb{Z}$ kaj la aroj super ĝi. Siaflanke, por la aro de entjeroj, ne ĉiam havas sencon la operacio de divido ĉar tio povas rezultigi ankaŭ ne entjeron kiel ekz. kiam ni dividas $7:10$ ka, sed ĉi operacio havas ĉiamfoje sencon por la aro de la raciaj nombroj. La elradikiĝo ne havas sencon ĉiamfoje por reeloj, sed jes por tiuj kompleksaj (la dua radiko de (-3) ne donas reelon, sed kompleksan nombron).

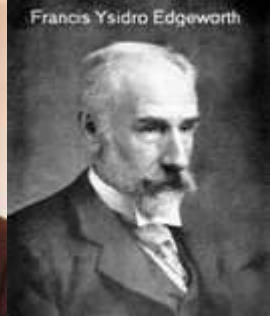
Samtiel, se ni esploru la inican koncepton pri mem la aro. La finiaj aroj akceptas la leĝojn de aritmetiko, kiel ekz. la leĝon de la interŝanĝo de la pozicioj $A + B = B + A$ kaj $A + B > A$ aŭ $A + B < A$, dum la nefiniaj aroj posedas leĝecojn tute novaj je kvalite, en ili povas esti vera $A + B = A$. Ekz. ni prenu la aron de la naturaj nombroj kaj la aron de paraj nombroj. Ĉi tiuj havas senfine da elementoj sed tamen ilin apenaŭ ni povus kompari per operacioj $A > B$ aŭ $A < B$, kontraŭe, ĉe ili validas $A + B = A$ ĉar ĉiu para nombro estas ankaŭ natura nombro.

Similajn konkludojn oni povas dedukti se oni komparas la finiajn seriojn kun tiuj senfiniaj. Oni apenaŭ povas apliki ĉe ili ĉiamfoje la leĝojn konstatitaj ĉe la finiaj serioj kaj tiuj konverĝaj, tio estas ili ne povas deriviĝi termino al termino aŭ integriĝi termino al termino, ks. Aŭ ili povas rezultigi adiciinte ne ĉiam certajn seriojn, ekz. la sumo de du diverĝaj serioj povas esti iamfoje eĉ konverga $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n - \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = 0$ aŭ diverga $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n + \sum_{n=1}^{\infty} 1/2n$

Literaturo

1. Matematika Zbavitëse, (Amuza matematiko) Tiranë 1977

2. Lojëra dhe rebuse matematike (Ludoj kaj matematikaj rebusoj), Tiranë 1980
3. Perelman “Matematika e gjallë” (Viva matematiko), Tiranë. .
4. The Universal History of Numbers, Harwill, London 1998
5. Amuza matematiko por gelernantoj, Sofio 1992
6. Sekreti kibernetiki, Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës Tiranë
7. Vnekllasnaja rabota po matematike, Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës, Tiranë
8. Gdje oshibka?, Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës, Tiranë
9. Vesjolloje i zanimateloje o çisllah i figurah. , Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës, Tiranë
10. Matematika i selsoje hozjajstvo. Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës, Tiranë
11. Revista “Matematika v shkole” (revuo)
12. Kak zhe nazivajetsja eta knjiga?, Biblioteka Kombetare, Tiranë
13. First journeys in Numberland, Biblioteka Kombetare, Tiranë
14. Istoriya aritmetiki, Biblioteka Kombetare, Tirane
15. Esercizi di matematica, Biblioteka Kombëtare, Tiranë
16. Mari Berronde, Zanimatelnije zadaçi, Biblioteka e Akademisë së Shkencave
17. Selected problems and theorems in elementary mathematics, Biblioteka e Akademisë së Shkencave.
18. E. A. Dishinskij, Igroteka matematičeskogo kruzhka, Biblioteka Kombëtare, Tiranë
19. Po sledam Pifagori, Biblioteka Kombëtare, Tiranë
20. Bazat e matematikës, Biblioteka e Akademisë së Shkencave
21. Rasskazi o reshenijah zadaç, Biblioteka e Fakultetit të Shkencave të Natyrës
22. Lawrence C. Eggen, Mathematics , models and applications
23. Purcell, Calculus with analitic geometry
24. Petraq Pilika, Ushtrime dhe probleme matematike te zgjidhura (Ekzercoj kaj problemoj matematikaj solviaj),
25. Aleko Minga, Befasitë e matematikës, (surprizoj de maematiko), Tiranë 2001
26. Charles D. Melke, Vernen. Huren, Mathematical Ideas
27. I. N. Sergejev; S. N. Olehnik; S. B. Gashkov, Primeni matematiku



David Hilbert

