Elementoj de

Nelineara Optiko

Omaĝe al memoro de mia patro

Behrouz SOROUSHIAN

Scienco en Esperanto
Laboro por la interreta dissendolisto
Per-Esperanto-BazaScienco [Es.Bz.Sc]

kaj

Scienca kaj Teknika Esperanto-Biblioteko [STEB]

Kanado, Vintro 2006-2007

Enhavotabelo

Mi sincere dankas sinjorojn Kenneth Price, Harri Laine kaj Andreas Kueck pro provlegado de mia skribaĵo, korektado kaj iliaj valoraj konsiloj. Ankaŭ mi dankas sinjorojn Renato Corsetti kaj Amri Wandel pro iliaj afablaj subtenoj.

1. Enkonduko

Kiam grado de iu efiko estas rekte proporcia al grandeco de iu el ĝiaj kaŭzantaj faktoroj, tiu fenomeno nomiĝas lineara rilate tiun faktoron. Unuavide ŝajnas, ke plejparto de la naturaj fenomenoj estas tiaj. Ekzemple, sub normalaj kondiĉoj kaj dum ĉiutagaj spertoj, duobla granda tensio sur du ekstremoj de drato kaŭzas fluon de duobla granda kurento tra ĝi. Ankaŭ apliki duoblan forton al objektoj kaŭzas duoblan akcelon de ili. Lineareco de fenomenoj draste simpligas ilian studon, sed ne ĉiuj fenomenoj en la naturo estas linearaj.

> *Fiziko estus teda kaj vivo malpli interesa, se ĉiuj fizikaj fenomenoj ĉirkaŭ ni estus linearaj. Feliĉe ni vivas en* ***nelineara mondo****. Kvankam konsideri fenomenojn linearaj faras fizikon pli bela tamen ilia nelineareco faras fizikon ekscitanta.*[1]

Fakte multaj el la naturaj fenomenoj estas nelinearaj kaj ofte lineareco estas nur bonega alproksimiĝo al la realo. Uzante sufiĉe grandajn fortojn aŭ ekstreme intensajn signalojn tiu ĉi nelineareco aperas. Ĝin oni povas observi en elektroniko, mekaniko, hidraŭliko kaj multaj aliaj branĉoj de la teknologio kaj de la scienco. Antaŭ studo de nelineara optiko, ni ĉi-sube rigardos al kelkaj sekvoj de nelineareco en kazo pli ĝenerala sed samtempe simpligita. Konsideru du maltravideblajn skatolojn kiuj respektive respondas lineare kaj nelineare reage al nespecifita signalo. Por plisimpligi nian studon, ni konsideras signalon en formo de unuharmona oscilado :

$$S(t) = S_0 \cos(\omega t) \qquad [1]$$

En la supera ekvacio t estas tempo, ω angula frekvenco (kvankam la vera frekvenco de lumondo estas $\nu = \omega/2\pi$, tamen en la optiko oni ofte uzas la malpli longan terminon *frekvenco* anstataŭ la termino *angula frekvenco* – depost nun ni ankaŭ faras tion) kaj S_0 amplitudo de la oscilado. Tie, por pli simpligi nian rudimentan analizon, ni neglektis fazon kiu povas dekomence ekzisti en oscilado, tamen tio ne reduktos ĝeneralecon de nia analizo. Rezulto de trapaso de la signalo tra skatolo kiu havas linearan respondon, estas signalo kies grando estas *rekte proporcia* al la grando de la enirinta signalo. Tion oni povas skribi kiel :

$$S_{eliront a}(t) = \alpha S(t) \qquad [2]$$

[1] Y. R. Shen, *the Principles of Nonlinear Optics*.

Do rezulto de la lineara sistemo estas :

$$S_{eliranta}(t) = \alpha S_0 \cos(\omega t) \qquad [3]$$

La skalaro α povas esti aŭ malpli ol unu kaj tiam la signalo estas *atenuita*, aŭ pli ol unu kaj tiam ĝi estas *amplifita*. Krom tio dum la procezo neniu alia kvalito de la signalo ŝanĝiĝas. Ĝenerale kiel respondon de la nelineara skatolo oni povas elekti funkcion en ĉiu ajne stranga formo, tamen por nia intenco, ĉi tie, polinomo de la eniranta signalo sufiĉos (cetere, en matematiko montriĝas, ke ĉiu funkcio povas skribiĝi en formo de polinomo) :

$$S_{eliranta}(t) = \alpha S(t) + \beta S^2(t) + \gamma S^3(t) + \cdots \qquad [4]$$

El la ekvacio oni vidas, ke en kazo de nelineara sistemo la rezulta signalo ne plu rekte proporcias al la eniranta signalo sed ĝi ankaŭ dependas de ĝiaj kvadrato, kubo kaj pli grandaj potencoj. Tio havas gravajn konsekvencojn. Por kompreni ilin, ni rigardu kiel dependas la rezulto de la kvadrato de la eniranta signalo (ni ignoru la aliajn termojn de la polinomo [4]):

$$S_{eliranta}(t) \propto \beta S^2(t) = \beta\left[S_0 \cos(\omega t)\right]^2 = \beta S_0^2 \cos^2(\omega t) \qquad [5]$$

Samtempe laŭ trigonometriaj leĝoj oni povas ankaŭ skribi :

$$S_{eliranta}(t) \propto \frac{1}{2}\beta S_0^2 \left[1+\cos(2\omega t)\right] \qquad [6]$$

Oni vidas, ke nura aldono de kvadrata dependeco enkondukas novajn konsekvencojn. La unua termo en [6] estas konstanta ŝovo de la rezulta signalo. Tio signifas, ke io konstanta aldoniĝas al la eliranta signalo. La dua termo estas alia oscilado, kies frekvenco 2ω estas duoblo de tiu de la enirinta signalo ω. En optiko, la efiko de ĉi-lasta termo nomiĝas *generado de dua harmono* kaj ĝi povas estigi lumoradiojn kun aliaj ondolongoj (koloroj). Pli poste la originoj kaj kelkaj konsekvencoj de nelineareco en optiko pli detale studiĝos. Por kompreni ilin, la leganto devas jam scii bazojn de la klasika elektrodinamiko kaj principojn de la lineara optiko.

2. Interago inter lumo kaj materio

El klasika vidpunkto, lineara optiko estas studo de vojoj tra kiuj lumoradio propagiĝas. El iu pli moderna vidpunkto, ĝi estas studo de interagoj inter lumoradio kaj materio. Ambaŭ vidpunktoj estas diversaj esprimoj de sama veraĵo, ĉar la propagiĝovojo de lumoradio draste dependas de ĝiaj interagoj kun materio (En vakuo lumo vojaĝas laŭ rekta linio, krom en ege densa gravita kampo, kion ni ne spertas surtere). Sed kio okazas al lumo en materio? Tion unue ni provas

klarigi uzante analogion. Supozu risorton kun maso alligita al unu el ĝiaj ekstremoj. Aplikante forton al la maso por ĝin tiri oni povas streĉi la risorton. Tio kaŭzas, ke alia forto el la risorto aplikiĝos al la maso kaj kontraŭagas la tirantan forton. Ellasite post streĉo de la risorto, la maso komencas unuharmonan osciladon, kaj tio daŭros por ĉiam (se ne estas ia frota forto). Ankaŭ eblas unuharmone osciligi la risorton aplikante forton kiu varias unuharmone. En mekaniko oni montras, ke en tiu kazo la oscila frekvenco de la risorto ekzakte egalas al la frekvenco de la aplikata forto. Tio estas principo de la lineara optiko. Oni metu elektran kampon anstataŭ la forto kiu aplikiĝas al la maso alligita al la risorto (tio estas la elektra kampo de la lumoradio). Ankaŭ oni devas anstataŭigi delokiĝon de la maso per kvalito kiu nomiĝas polarizo. La maso mem anstataŭiĝas per elektronoj kiuj ekzistas en atomoj de la materio. Tiu polarizo **P** montras delokiĝon de la elektronoj rilate nukleojn de la atomoj en materio, kaj kreiĝas pro forto kiu aplikiĝas al la elektronoj per la elektra kampo **E** de la lumo. Rilato inter tiuj du kvantoj estas :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \qquad [7]$$

en kiu χ estas *elektra polarizeblo* de la materialo. La polarizo estas respondo de materio al elektra kampo de lumoradio. Samtempe ĝia estiĝo ankaŭ influas propagiĝon de la lumoradio tra la materialo. Por kompreni tiun influon oni devas uzi matematikon kiu priskribas rilatojn inter elektra, **E**, kaj magneta, **B**, kampoj de la lumoradio. Tiu matematiko konsistas el la ekvacioj de Maxwell. Por nemagneta materialo, en kiu ne estas liberaj ŝargoj (tio estas dielektriko), la ekvacioj de Maxwell skribiĝas en formo :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \qquad [8]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad [9]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad [10]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad [11]$$

en kiuj la vektoro **D** estas *elektra delokiĝo* kaj difiniĝas kiel :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad [12]$$

La konstanto ε_0 estas la elektra permitivo de vakuo kaj μ_0 magneta permitivo de vakuo. Por vidi rilaton inter elektra polarizo de la materialo kaj elektra kampo de la lumoradio oni devas solvi la ekvaciojn de Maxwell. Por fari tion ni kalkulas la kirlojn de ambaŭ flankoj de la ekvacio [9]. Tio rezultigos :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \qquad [13]$$

El la matematiko de vektorkampoj oni scias ke la maldekstra parto de [13] estas :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \qquad [14]$$

kaj ĉar $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (supoziĝas ke la medio estas homogena kaj izotropa) do :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \qquad [15]$$

Oni povas uzi [11] kaj reskribi dekstran parton de [13] en formo :

$$-\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \qquad [16]$$

Kunmetante tiujn rezultojn kaj prizorgante pri difino de **D** en [12] oni povas skribi :

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \qquad [17]$$

aŭ alie aranĝi ĝin en formo :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \qquad [18]$$

Tio estas la ekvacio de elektromagneta ondo (oni povas montri ke simila ekvacio por la magneta kampo **B** ankaŭ ĝustas) kaj en ĝi c estas difinita kiel :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad [19]$$

En vakuo, kie polarizo ne estiĝas (**P** = 0), la ondoekvacio transformiĝas al :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad [20]$$

kaj la solvo de tiu ekvacio estas kampo oscilanta en formo :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \qquad [21]$$

en kiu $|\mathbf{k}| = \omega / c$. Plej ofte en optiko oni simpligas la ekvacion [21] supozante ke la ondo propagiĝas laŭlonge de la akso z. Tiam oni povas skribi :

$$E(t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \qquad [22]$$

En materio tamen polarizo ne plu estas nul kaj oni devas konsideri la ekvacion [18]. Samtempe laŭ la ekvacio [7] la polarizo **P** kaj la elektra kampo **E** estas interrilataj. En lineara optiko oni trovas ke la elektra polarizeblo, χ, ne dependas de la elektra kampo kaj estas konstanta valoro. Ĝi tamen povas esti kompleksa nombro, kiun oni skribas en formo :

$$\chi = \chi' + i\chi'' \qquad [23]$$

Same en la lineara optiko oni enkondukas du kvalitojn *la refraktindicon*, n, kaj *la koeficienton de sorbiĝo*, κ, kiuj rilatas al la elektra polarizeblo kiel :

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \chi' \qquad [24]$$

kaj

$$2n\kappa = \chi'' \qquad [25]$$

Ni diris ke en la lineara optiko χ estas konstanta. Do, uzante la ekvaciojn [7] kaj [18] oni povas skribi :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}(1 + \chi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad [26]$$

Unu solvo por ĉi tiu ekvacio ankoraŭ estas ondo en formo [22]. Enmetante ĝin en la ekvacion [26] oni trovas :

$$\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 = 1 + \chi \Rightarrow \frac{kc}{\omega} = n + i\kappa \qquad [27]$$

Kaj do oni povas reskribi la ondon kiel:

$$E(t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c} z - t\right) - \frac{\omega \kappa}{c} z} \qquad [28]$$

Tio reprezentas *atenuiĝantan ondon* kiu propagiĝas je rapido c/n laŭlonge de la akso z.

Ĝis nun ni studis, kio okazas pro lineara interago de lumo kun materio. En nelineara optiko oni trovas ke la elektra polarizeblo ne plu povas konsideriĝi kiel kompleksa valoro kiu estas konstanto. La unua hipotezo de la nelineara optiko (por priskribi fenomenojn kiujn oni observas) estas tio ke la elektra polarizeblo χ dependas de la aplikata elektra kampo (de la lumoradio). Por konsideri tian dependecon oni skribas la elektran polarizeblon en formo de polinomo kies variablo estas la elektra kampo :

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} E + \chi^{(3)} E^2 + \cdots \qquad [29]$$

Oni notu ke tio estas nur unu maniero por priskribi nelinearecon en optiko sed ne devas konsideriĝi kiel la sola ekzista priskribo kaj nia plej lasta fizika kompreno pri la efiko. (*En niaj formuloj kiam la supraj indicoj estas inter krampoj, ili montras ordon de la koeficientoj en la serio. Tio estas por apartigi ilin disde la potencoj, kiuj ne skribiĝas inter krampoj*).

Pliposte ni eĉ vidos ke χ vere ne estas skalaro sed tensoro kaj oni devas alie skribi la ekvacion [29]. Tamen jam konsiderante la ĉi-supran priskribon pri nekonstanta elektra polarizeblo oni povas reskribi la polarizon kiu estiĝas en materio kaj estis donita per [7] en formo :

$$P = P_L + P_{NL} = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} + \chi^{(2)} E + \chi^{(3)} E^2 + \cdots) E \qquad [30]$$

Estas evidente ke la lineara parto de polarizo estas :

$$\mathbf{P}_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} \qquad [31]$$

dum ĝia nelineara parto estas :

$$P_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \cdots \qquad [32]$$

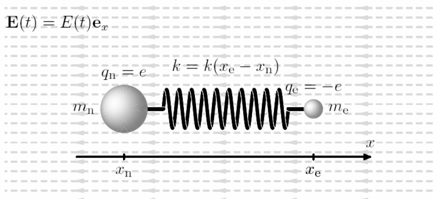
Enmetante tiun ĉi novan polarizon en la ekvacion de ondo [18] revenante al ĝia vektora formo oni trovas :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\left(1 + \chi^{(1)}\right)\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \qquad [33]$$

kaj devas memori ke $(1 + \chi^{(1)})$ estas la dielektrika konstanto kaj doniĝas per [27]. La ekvacio [33] estas unu el la plej esencaj en nelineara optiko. Pli poste ni studos ĝin kaj provos trovi kelkajn el ĝiaj solvoj en diversaj kazoj, sed antaŭ tio ni unue vidu kiel nelineara polarizo estiĝas kaj kiujn originojn ĝi havas.

3. Originoj de la nelineara polarizo

La leganto invitiĝas rememori pri analogio kiun en komenco de la antaŭa sekcio ni uzis por priskribi tion kio okazas en materio dum ĝi ricevas lumoradion. Nu, tiu komparo de elektronoj en atomoj de materio kun oscilantaj masoj alligitaj al risorto estas io pli ol analogio. En la modelo de Lorentz elektronoj sub influo de elektra kampo de la lumoradio delokiĝas, sed ili estas altirataj direkte al siaj unuaj lokoj pro la interligantaj fortoj en atomo. Kombino de tiuj fortoj kreas situacion, kiu povas priskribiĝi per rilaksa oscilado (aldonu froton al la modelo de risorto kaj alligita maso).



Bildo 1 – Modelo de risorto por priskribi polarizon sub influo de elektromagneta kampo.

Nun ni provas trovi elektran polarizeblon uzante tiun ĉi skemon. Unuharmona oscilado de la risorto estiĝas pro forto kiu priskribiĝas per la leĝo de Hooke. Ĝi estas :

$$F = -kx \qquad [34]$$

Tiu leĝo asertas ke, ju pli malproksimen de la ekvilibra punkto vi tiras la mason, des pli granda forto de la risorto klopodas revenigi ĝin al tiu punkto. Per la leĝo de Newton oni povas skribi ekvacion de movo por tia forto :

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \qquad [35]$$

Tuj estas evidente ke unu solvo de tiu ekvacio estas unuharmona oscilado en formo :

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[x e^{-i\omega_0 t} \right] = \frac{1}{2}\left[x e^{-i\omega_0 t} + k.k \right] \qquad [36]$$

Enmetante tiun respondon en la ekvacion [35] oni trovas ke $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$. Ĉi tie anstataŭ ofte uzata formo de sinuso aŭ kosinuso por la oscila movo ni uzis eksponencialan formon kiu estas pli taŭga por niaj postaj analizoj. En la supra ekvacio *k.k* signifas kompleksan konjugaĵon de la unua termo t.e. $xe^{i\omega_0 t}$. Nia solvo estas valida dum oni ne konsideras la rezistantajn fortojn de froto kaj la pelantan forton de la oscilanta elektra kampo. Aldonante tiujn fortojn oni trovas ekvacion de la movo en formo :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} + \gamma \frac{d}{dt}\mathbf{r} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E} \qquad [37]$$

en kiu γ reprezentas frotajn fortojn kaj **E** estas la oscilanta elektra kampo de la lumoradio. En la ekvacio ω_0 ne plu estas la aktuala frekvenco de oscilado de la elektrono sed la frekvenco kiun ĝi havus se ne ekzistus iu frota forto. Oni povas montri, ke en tiu kazo la oscilada frekvenco de la elektrono egalas al la frekvenco de la pelanta forto, kiu aplikiĝas pro la elektra kampo **E**. Supozu ke la elektra kampo havas frekvencon ω. Oni povas skribi :

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left[E e^{-i\omega t} \right] = \frac{1}{2}\left[E e^{-i\omega t} + k.k \right] \qquad [38]$$

$$\mathbf{r} = \mathrm{Re}\left[r e^{-i\omega t} \right] = \frac{1}{2}\left[r e^{-i\omega t} + k.k \right] \qquad [39]$$

Enmetante tiujn rilatojn en la ekvacion [37] oni trovas :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) r - 2i\omega\gamma r = -\frac{e}{m} E \qquad [40]$$

kaj tio rezultigas :

$$r = -\frac{eE}{m\left[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma\right]} \qquad [41]$$

La rezulta polarizo estas :

$$P(\omega) = -Ner(\omega) = \frac{Ne^2}{m}\frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \qquad [42]$$

Aliflanke ni scias ke la polarizo rilatas al elektra polarizeblo per la ekvacio [7]. Do oni trovas la elektran polarizeblon en formo :

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \qquad [43]$$

Nun oni povas uzi la ekvacion [23] por apartigi la imaginaran parton de la elektra polarizeblo disde ĝia reela parto kaj rilatigi ilin al la refraktindico *n* kaj la koeficiento de sorbiĝo *κ*. Tio ĉi tie ne interesas nin. Ni ŝatas vidi kio okazas kiam la leĝo de Hooke ne plu estas aplikebla. Estas oportune enkonduki potencialon kiu respondas al la risorta forto en [34]. Ĝi estas *parabola* aŭ *unuharmona potencialo* en formo :

$$V(x) = -\int F dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \qquad [44]$$

La vera potencialo de risorto ne povas esti parabola por ĉiuj valoroj de delokiĝo *x*. La supra potencialo estas nur *bona alproksimiĝo al la vera situacio* por malgrandaj delokiĝoj, *x*. Pli reala potencialo povas esti polinomo de la delokiĝo :

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}max^3 + \frac{1}{4}mbx^4 + \cdots \qquad [45]$$

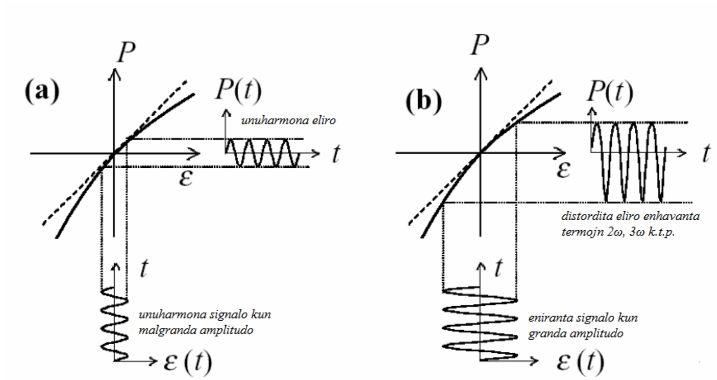
en kiu *a* kaj *b* estas *koeficientoj de malharmoneco*. El tiu potencialo oni povas trovi la forton kiu aplikiĝas al maso ligita ĉe ekstremo de la risorto (aŭ al elektronoj kiuj en atomoj situas en tia potencialo) :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -m\omega_0^2 x - max^2 - mbx^3 - \cdots \qquad [46]$$

Por potencialo kun la menciita formo du ebloj ekzistas: ĝi povas esti *centre simetria*, $V(x) = V(-x)$, aŭ *ne centre simetria*, $V(x) \neq V(-x)$. Evidentas ke en kazo de centresimetria potencialo nur tiuj termoj el la ekvacio [45] ekzistos kiuj havas parajn potencojn de la delokiĝo, *x* ;

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}mbx^4 + \cdots$$
$$F(x) = -m\omega_0^2 x - mbx^3 - \cdots \qquad [47]$$

Ĉi-sube ni studos ambaŭ kazojn. En ĉiu kazo ni konsideros tiujn malharmonajn termojn, kiuj havas la plej malgrandajn potencojn de la delokiĝo. Por solvi la movoekvaciojn rilate al *x*(*t*) kaj do trovi formon de *P*(*t*) ni uzas *metodon de la simpla perturbo* (tiu metodo ankaŭ uziĝas en kvantuma mekaniko; la leganto invitiĝas studi ĝin en aliaj fontoj).



Bildo 2 – Distordiĝo de eniranta signalo kaŭze de apero de nelinearaj efikoj en materio.

3.1. Nelineara polarizo en ne centre simetria potencialo

Unue ni konsideros ne centre simetrian potencialon, kun tiuj malharmonaj termoj en ĝi, kiuj havas la plej malgrandajn potencojn de la delokiĝo :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + ax^2 = -\frac{e}{m}E(t) \qquad [48]$$

Por solvi tiun ĉi ekvacion oni devas konsideri ke termo ax^2 estas malgranda perturbo, kaj la pelanta kampo estas en formo $\lambda E(t)$ en kiu $0 < \lambda < 1$. Nun la problemo estas trovi respondojn kiuj estas en formo :

$$x(t) = \lambda x^{(1)}(t) + \lambda^2 x^{(2)}(t) + \lambda^3 x^{(3)}(t) + \cdots \qquad [49]$$

Egaligante samajn potencojn de *λ* en ambaŭ flankoj de la movoekvacio oni trovas :

$$\lambda^1 : \ddot{x}^{(1)} + 2\gamma\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\frac{e}{m}E(t) \qquad [50]$$

$$\lambda^2 : \ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -a\left[x^{(1)}(t)\right]^2 \qquad [51]$$

Sekve se oni konsideras ke la elektra kampo $E(t)$ havu formon kiel tiun donatan en la ekvacio [38] :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[Ee^{-i\omega t} + k.k.\right] \qquad [52]$$

La ekvacio [50] rezultigas :

$$x^{(1)}(\omega) = -\frac{eE}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma} \qquad [53]$$

Tio estas la sama rezulto kiun oni trovis por la lineara polarizo en la ekvacio [41]. Por simpligi la venontajn formulojn oni enkondukas la notacieron :

$$D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma \qquad [54]$$

Nun ni konsideras la ekvacion [51]. Konsiderante tiun delokiĝon kiu rilatas la linearan parton kiel :

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\left[x^{(1)}(\omega)e^{-i\omega t} + k.k.\right] \qquad [55]$$

oni povas skribi :

$$\left[x^{(1)}(t)\right]^2 = \left[\frac{1}{4}\left[x^{(1)}(\omega)\right]^2 e^{-2i\omega t} + k.k.\right] + \frac{1}{2}\left|x^{(1)}(\omega)\right|^2 \qquad [56]$$

Oni tuj vidas ke la dua potenco de la delokiĝo $x^{(2)}$ havu komponantojn kies frekvencoj estas ±2ω kaj nul. Tio signifas ke oni povas skribi :

$$x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\left[x^{(2)}(2\omega)e^{-2i\omega t} + k.k.\right] + \frac{1}{2}\left[x^{(2)}(0) + k.k.\right] \qquad [57]$$

Unue nin interesas nur tiu parto de la delokiĝo kies frekvenco estas 2ω. Enmetante tiun parton de la respondo en la ekvacion [51] oni trovas :

$$\left[-(2\omega)^2 - 2i\gamma(2\omega) + \omega_0^2\right]x^{(2)}(2\omega) = \frac{-\frac{a}{4}\left(\frac{e}{m}\right)^2 E^2}{\left[D(\omega)\right]^2} \qquad [58]$$

Kaj oni povas mallongigi tiun ekvacion en formo :

$$x^{(2)}(2\omega) = -\frac{\frac{a}{4}\left(\frac{e}{m}\right)^2 E^2}{D(2\omega)\left[D(\omega)\right]^2} \qquad [59]$$

Tiu parto de la delokiĝo rilatas al la respektiva polarizo en formo :

$$\begin{aligned} &P = P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots \\ &P^{(2)}(2\omega) = \varepsilon_0\chi^{(2)}(2\omega;\omega,\omega)E^2(\omega) = -Nex^{(2)}(2\omega) \end{aligned} \qquad [60]$$

Uzante tiun ekvacion kaj la ekvacion [59] oni povas trovi polarizeblon de la polarizo rilata al la dua potenco de la delokiĝo :

$$\chi^{(2)}(2\omega;\omega,\omega) = \frac{Ne^3 a}{4\varepsilon_0 m^2}\frac{1}{D(2\omega)\left[D(\omega)\right]^2} \qquad [61]$$

Poste ni montros, kiel tiu ĉi polarizeblo rezultigas generadon de dua harmono. La leganto notu ke en polarizo rilata al la unua potenco de la delokiĝo, la ekvacio [53], nur ekzistas unu resonanca frekvenco $\omega = \omega_0$, dum por polarizo rilata al la dua potenco de la delokiĝo, la ekvacio [61], ekzistas du resonancaj frekvecoj $\omega = \omega_0$ kaj $2\omega = \omega_0$. En la antaŭa analizo ni ignoris tiun parton de la delokiĝo en la ekvacio [57] kies frekvenco estis nul. Por solvi tiun parton de la problemo oni povas uzi la ekvacion [51]. Oni trovas :

$$\left(0 + 0 + \omega_0^2\right)x^{(2)}(0) = -\frac{a}{2}\left|x^{(1)}(\omega)\right|^2 \qquad [62]$$

kaj tio rezultigas :

$$x^{(2)}(0) = -\frac{a}{2\omega_0^2}\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{EE^*}{D(\omega)D^*(\omega)} = \frac{ae^2}{2m}\frac{|E|^2}{D(0)D(\omega)D(-\omega)} \qquad [63]$$

en kiu :

$$D(0) = (0 + 0 + \omega_0^2),\ D^*(\omega) = D(-\omega) \qquad [64]$$

Difinante $P^{(2)}(0)=\varepsilon_0\chi^{(2)}(0,\omega,-\omega).2EE^*$, oni trovas :

$$\chi^{(2)}(0,\omega,-\omega) = \frac{Ne^3 a}{4\varepsilon_0 m^2}\frac{1}{D(0)D(\omega)D(-\omega)} \qquad [65]$$

Se la delokiĝo estas rezulto de du elektraj kampoj (pro du lumofaskoj) tiam oni povas skribi la rezultan efikon kiel jena sumo :

$$E(t) = \frac{1}{2}E_1 e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{2}E_2 e^{-i\omega_2 t} + k.k. \qquad [66]$$

kaj $[x^{(2)}(t)]^2$ povas skribiĝi kiel :

$$\left[x^{(1)}(t)\right]^2 =$$
$$\frac{1}{4}\left[x^{(1)}(\omega_1)\right]^2 e^{-2i\omega_1 t} + \frac{1}{4}\left[x^{(1)}(\omega_2)\right]^2 e^{-2i\omega_2 t} + k.k. +$$
$$+\frac{1}{2}x^{(1)}(\omega_1)x^{(1)}(\omega_2)e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + k.k. + \qquad [67]$$
$$+\frac{1}{2}x^{(1)}(\omega_1)\left[x^{(1)}(\omega_2)\right]^* e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + k.k. +$$
$$+\frac{1}{4}\left|x^{(1)}(\omega_1)\right|^2 + \frac{1}{4}\left|x^{(1)}(\omega_2)\right|^2$$

Do oni vidas ke de tia situacio rezultos sumo de la du frekvencoj, ilia diferenco aldone al duaj harmonoj (de ambaŭ frekvencoj) kaj la rezulto de optika rektifiĝo. En simila maniero oni povas kalkuli nelinearajn polarizeblojn kiuj rezultigas sumon kaj diferencon de la frekvencoj:

$$\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2) = \frac{Ne^3 a}{4\varepsilon_0 m}\frac{1}{D(\omega_1+\omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)} \qquad [68]$$

$$\chi^{(2)}(\omega_1-\omega_2;\omega_1,-\omega_2) = \frac{Ne^3 a}{4\varepsilon_0 m}\frac{1}{D(\omega_1-\omega_2)D(\omega_1)D(-\omega_2)} \qquad [69]$$

Notu ke resonanco povas okazi en la tri frekvencoj kiuj funkcias en la procezo. Kvankam nia modelo de la neharmona oscilado ne estas tre ekzakta tamen oni povas ĉerpi mesaĝojn el ĝi :

I. Por krei procezojn kiuj rilatas al la dua grado de polarizeblo, $\chi^{(2)}$, oni bezonas medion kiu ne estas centresimetria.
II. Procezoj rilataj al la dua grado de la polarizeblo rezultigas sumon kaj diferencon de la frekvencoj kiuj aplikiĝas al la materialo. En kazo kiam du frekvencoj estas samaj (kampo de ununura lumofasko) tiu efiko rezultigas generadon de dua harmono kaj optikan rektifiĝon.
III. Efikoj rilataj al la dua grado de la polarizeblo povas pligrandiĝi ĉiam kiam unu el la funkciantaj frekvencoj estas proksima al iu el la resonancaj frekvencoj de la materio.
IV. Nelinearaj polarizebloj estas rilataj al la lineara polarizeblo.

La lasta noto aludas al la « leĝo de Miller ». Ni trovis :

$$\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2) = \frac{\left(Ne^3/\varepsilon_0 m^2\right)a}{D(\omega_1+\omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)} \qquad [70]$$

sed ni ankaŭ scias ke :

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{D(\omega)} \qquad [71]$$

El tiu lasta ekvacio oni povas konkludi :

$$\frac{1}{D(\omega)} = \chi^{(1)}(\omega)\frac{\varepsilon_0 m}{Ne^2} \qquad [72]$$

Nun oni povas uzi la ekvacion [72] por reskribi la ekvacion [70] en formo :

$$\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2) = \frac{\varepsilon_0^3 m^3}{N^3 e^6}\chi^{(1)}(\omega_1+\omega_2)\chi^{(1)}(\omega_1)\chi^{(1)}(\omega_2)\times$$
$$\times\left(\frac{Ne^3}{\varepsilon_0 m^2}\right)a = \frac{\varepsilon_0^2 ma}{N^2 e^3}\chi^{(1)}(\omega_1+\omega_2)\chi^{(1)}(\omega_1)\chi^{(1)}(\omega_2) \qquad [73]$$

Konante a/N^2 kaj $\chi^{(1)}$ por ĉiu frekvenco kiu kontribuas la procezon oni povas taksi la valoron de $\chi^{(2)}$. Unuafoje Miller[1] malkovris ke por preskaŭ ĉiuj materialoj a/N^2 estas proksimume konstanta. Alivorte li trovis ke:

$$\frac{\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2)}{\chi^{(1)}(\omega_1+\omega_2)\chi^{(1)}(\omega_1)\chi^{(1)}(\omega_2)} \sim \text{konstanta} \equiv \delta \qquad [74]$$

en kiu $\delta = \dfrac{\varepsilon_0 ma}{N^2 e^3}$ konatiĝas per la nomo « *Miller-a* δ ». Tio povas helpi konjekti la valoron de $\chi^{(2)}$ sen mezuri ĝin. Ĝenerale $\delta \approx 2.5 \times 10^{-13}$ m/V. Por materialo kies n = 1.5 ĉar $\chi = n^2-1$ do $\chi = 1.25$. Nun oni trovas ke :

$$\chi^{(1)}(\omega_1+\omega_2)\chi^{(1)}(\omega_1)\chi^{(1)}(\omega_2) \sim 2$$

kaj konsekvence rezultas $\chi^{(2)} \approx 5 \times 10^{-13}$ m/V aŭ 0.5 pm/V.

3.2. Nelineara polarizo en centre simetria potencialo

Tia potencialo ekzistas en materialoj kies elektromagnetaj trajtoj ne ŝanĝiĝas post transformiĝo en formo $r \rightarrow -r$. En tiaj materialoj $a = 0$ kaj do la dua grado de la polarizeblo $\chi^{(2)}$ estas nul. La plej malgranda potenco de la malharmoneco estas mbx^3 (la ekvacioj [45] kaj [46]). Do ekvacio de la movo povas skribiĝi en formo :

$$\lambda^1 : \ddot{x}^{(1)} + 2\gamma\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\frac{e}{m}E(t) \qquad [75]$$

$$\lambda^3 : \ddot{x}^{(3)} + 2\gamma\dot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -b\left[x^{(1)}(t)\right]^3 \qquad [76]$$

[1] Miller, Appl. Phys. Lett., 5, 17, (1964).

Kiel en la antaŭaj analizoj, supoziĝas ke la elektra kampo estu en formo :

$$E(t) = \frac{1}{2} E e^{-i\omega t} + k.k. \qquad [77]$$

Evidentas ke por solvi la ekvaciojn de movo oni devas kalkuli la kubon de tiu parto de la delokiĝo kiu rilatas al la unua grado de la polarizeblo. Ĝin oni povas skribi kiel :

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2} x^{(1)}(\omega) e^{-i\omega t} + k.k. \qquad [78]$$

kaj do oni trovas :

$$\begin{aligned} \left[x^{(1)}(t)\right]^3 &= \frac{1}{8}\left[\left(x^{(1)}(\omega)\right)^3 e^{-3i\omega t} + k.k.\right] + \\ &+ \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \left[x^{(1)}(\omega) \cdot \left|x^{(1)}(\omega)\right|^2 e^{-i\omega t} + k.k.\right] \end{aligned} \qquad [79]$$

Delokiĝo rilata al la tria grado de polarizeblo havas komponantojn kies frekvencoj estas 3ω (*generado de triobla harmono*) kaj ω. Parto de la polarizo kiu havas komponantojn kun la frekvenco ω estas simila al la lineara polarizo $P^{(1)}$ kaj, kiel ĝi, rezultigas refrakton kaj sorbiĝon. Tamen ĉar la procezo estas nelineara ĝi dependas de la denso de la elektromagneta elradio (*denso-dependaj sorbiĝo kaj refrakto*). Por tiu kamponanto de la tria grado de delokiĝo kiu oscilas kun frekvenco ω oni povas skribi :

$$x^{(3)}(\omega) = -\frac{be^3}{3(2m)^3} \frac{|E|^2 E}{D(\omega)D(\omega)D(\omega)D(-\omega)} \qquad [80]$$

Do polarizo rilata al tiu parto de la delokiĝo estas:

$$P^{(3)} = -Nex^{(3)}(\omega) = -\frac{Nbe^4}{3(2m)^3} \frac{|E|^2 E}{\left[D(\omega)\right]^3 D(-\omega)} \qquad [81]$$

samtempe la polarizo estas :

$$P^{(3)} = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) |E|^2 E \qquad [82]$$

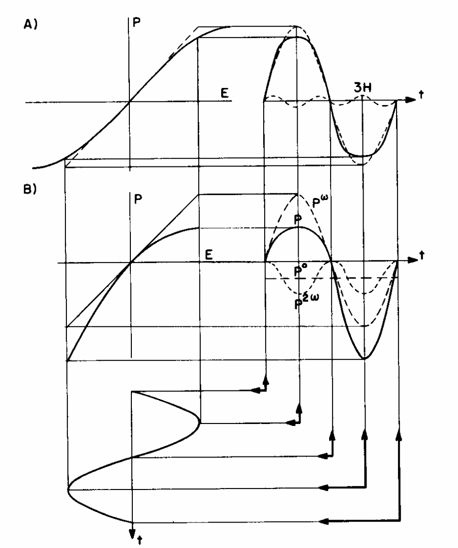
kaj tiel la tria grado de la polarizeblo troviĝas en formo :

$$\chi^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) = -\frac{Nbe^4}{3\varepsilon_0 (2m)^3} \frac{1}{\left[D(\omega)\right]^3 D(-\omega)} \qquad [83]$$

Sammaniere oni povas trovi polarizeblon de tiu parto kiu okazas en frekvenco 3ω. Ĝi estos :

$$\chi^{(3)}(3\omega; \omega, \omega, \omega) = -\frac{Nbe^4}{\varepsilon_0 (2m)^3} \frac{1}{\left[D(\omega)\right]^3 D(3\omega)} \qquad [84]$$

Pli sube ni studos eventojn kiuj okazas kiam la menciitaj nelinearaj polarizoj en la medio estiĝas.



Bildo 3 – Efikoj de centre simetria (supre) kaj necentresimetria (sube) potencialoj en distordiĝo de elirinta unuharmona signalo.

4. Propagiĝo de lumoradio sub influo de nelineara polarizo

Post vidi kiel nelinearaj polarizoj en materio estiĝas, nun ni volas lerni, kio sekvas el ilia ĉeesto. En la unua parto de tiu ĉi enkonduko ni vidis ke por studi efikon de la nelineara polarizo sur propagiĝon de elektromagneta ondo oni devas solvi la ondan ekvacion [33] :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\left(1 + \chi^{(1)}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \qquad [85]$$

Por plisimpligi nian studon, unue ni limigas nin al efikoj de tiu parto de la nelineara polarizo kiu rilatas al la dua grado de la polarizeblo, $\chi^{(2)}$. Kiel en la sekcio 3.1 ni vidis, en la plej ĝenerala kazo tiu parto de la polarizo kiu rilatas al la dua grado de la polarizeblo estiĝas en ĉeestado de du elektromagnetaj ondoj kies oscilofrekvencoj estas ω_1 kaj ω_2. La rezulta ondo povas havi frekvencon egalan al sumo de tiuj du frekvencoj aŭ al ilia diferenco. Nelinearan parton de la polarizo oni povas skribi kiel :

$$P^{(2)}(\omega_1+\omega_2)=\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2;\omega_1,\omega_2)E(\omega_1)E(\omega_2) \qquad [86]$$

aŭ

$$P^{(2)}(\omega_3)=\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)E(\omega_1)E(\omega_2) \qquad [87]$$

en kiu $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Por plisimpligi nian analizon ni supozas ke :

- Amplitudo de la du enirantaj lumoradioj ne eksplicite dependas de tempo.
- Ili estas ebenaj ondoj kiuj propagiĝas laŭlonge de akso z, do oni povas skribi iliajn elektrajn kampojn kiel skalarojn.
- Ne ekzistas sorbiĝo.

Tiam ni povas skribi la polarizon rilatan al la oscilofrekvenco ω_3 kiel :

$$P^{(2)}(\omega_3)= \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)E_0(\omega_1)e^{i(k_1z-\omega_1t)}E(\omega_2)e^{i(k_2z-\omega_2t)}+k.k. \qquad [88]$$

Ankaŭ eblas skribi tiun ekvacion en formo :

$$P^{(2)}(\omega_3)= \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)E_0(\omega_1)E_0(\omega_2)e^{i\left[(k_1+k_2)z-\omega_3t\right]}+k.k. \qquad [89]$$

Notu ke kvankam tiu ĉi parto de la polarizo oscilas en frekvenco ω_3, tamen ĝia *konstanto de propagiĝo* $k_1 + k_2$ dependas de la refraktindicoj en ω_1 kaj ω_2. Tio okazas ĉar la fazo de tiu parto de la polarizo surloke dependas de la elektraj kampoj en ω_1 kaj ω_2. Ni anticipas estiĝon de ondo E_3 kun oscilofrekvenco ω_3 pro tiu ĉi parto de la polarizo kaj do rigardas ĝian propagiĝon laŭ la ekvacio [85] :

$$\frac{\partial^2E_3}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\left(1+\chi^{(1)}(\omega_3)\right)\frac{\partial^2E_3}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2P^{(2)}_{\omega_3}(t,z)}{\partial t^2} \qquad [90]$$

Evidentas ke en ĝenerala kazo oni devas skribi la konstanton de propagiĝo de la rezulta ondo nespecifata kaj $k_3=n(\omega_3)\omega_3/c$. Ankaŭ oni devas konsideri tiun eblon ke la amplitudo de la rezulta elektra kampo ŝanĝiĝos kun z, do :

$$E_3(t,z)=\frac{1}{2}A_3(z)e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k. \qquad [91]$$

Oni povas ingi tiun ĉi formon de la elektra kampo en la ekvacion [90], sed antaŭ tio oni devas kalkuli derivojn :

$$\frac{\partial E_3}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial A_3}{\partial z}+ik_3A_3\right]e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k. \qquad [92]$$

$$\frac{\partial^2E_3}{\partial z^2}=\frac{1}{2}\left[ik_3\left[\frac{\partial A_3}{\partial z}+ik_3A_3\right]+\frac{\partial^2A_3}{\partial z^2}+ik_3\frac{\partial A_3}{\partial z}\right] \times e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k. \qquad [93]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2A_3}{\partial z^2}+2ik_3\frac{\partial A_3}{\partial z}-k_3^2A_3\right]e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k.$$

ankaŭ

$$\frac{\partial^2E_3}{\partial t^2}=-\frac{1}{2}\omega_3^2A_3(z)e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k. \qquad [94]$$

kaj :

$$\frac{\partial^2P^{(2)}_{\omega_3}}{\partial t^2}=-\frac{1}{2}\omega_3^2\varepsilon_0\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2) \times E(\omega_1)E(\omega_2)e^{i\left[(k_1+k_2)z-\omega_3t\right]}+k.k. \qquad [95]$$

Nun ni uzas *alproksimiĝon de malrapide varianta envelopo* kiu diras, ke la amplitudo de la estiĝanta lumoradio laŭlonge de z malrapide ŝanĝiĝas. Tio rezultigas ke :

$$\left|\frac{\partial^2A_3}{\partial z^2}\right|\ll 2k_3\left|\frac{\partial A_3}{\partial z}\right| \qquad [96]$$

Tiu ĉi alproksimiĝo validas ĝis kiam variiĝoj de $A_3(z)$ estas malgrandaj tra longecoj kiuj estas samgrandaj kun la ondolongo λ. Uzante tiun alproksimiĝon kaj la antaŭajn derivojn oni povas skribi :

$$\frac{1}{2}\left[2ik_3\frac{\partial A}{\partial z}-k_3^2A_3\right]e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k. +\frac{1+\chi^{(1)}(\omega_3)}{2c^2}\omega_3^2A_3(z)e^{i(k_3z-\omega_3t)}+k.k.= -\frac{\omega_3^2\mu_0\varepsilon_0}{2}\chi^{(2)}(\omega_3;\omega_1,\omega_2)E(\omega_1)E(\omega_2)e^{i\left[(k_1+k_2)z-\omega_3t\right]}+k.k. \qquad [97]$$

Konsiderante ke $k_3^2=\left[1+\chi^{(1)}(\omega_3)\right]\omega_3^2/c^2$ oni povas simpligi la ekvacion kiel :

$$2ik_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} e^{ik_3 z} = -\omega_3 \mu_0 \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2) e^{i(k_1+k_2)z} \quad [98]$$

aŭ

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{\omega_3 c \mu_0}{2n(\omega_3)} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2) e^{i\Delta kz} \quad [99]$$

kie $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ estas *faza malakordo*. Oni vidas ke ĉar $P^{(2)}(\omega_3) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2)$, do oni povas ĝenerale skribi:

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{\omega_3 c \mu_0}{2n(\omega_3)} P^{(2)}(\omega_3) e^{i\Delta kz} \quad [100]$$

aŭ

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{\omega_3}{2n(\omega_3)\varepsilon_0 c} P^{(2)}(\omega_3) e^{i\Delta kz} \quad [101]$$

en kiu $P^{(2)}$ povas reprezenti ĉian procezon rilatan al la dua grado de la polarizeblo, t.e. $P^{(2)}(\omega_3=\omega_1-\omega_2)$, $P^{(2)}(\omega_3=2\omega_1)$, k.s.
Faza malakordo okazas ĉar ondoj havantaj malsamajn frekvencojn propagiĝas kun malsamaj *fazorapidoj* kaj do iĝas *faze ne akordaj*. Tio malfavore efikas konvertiĝon de iu frekvenco al la alia. Eble oni povas pli simple kompreni tion rigardante generadon de dua harmono.

5. Generado de dua harmono

En la antaŭaj sekcioj ni vidis ke ĝenerale nelinearaj efikoj rilate la duan gradon de la polarizeblo povas okazi kiam du lumoradioj interagas kun materio. Tamen ankaŭ eblas estiĝo de tiaj efikoj pro elektromagneta kampo sur nur unu lumondo. Tiam $\omega_3 = 2\omega$ kaj nelineara polarizo skribiĝas kiel :

$$P^{(2)}(2\omega) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) E^2(\omega) \quad [102]$$

Nun ni povas reskribi la ekvacion [101] en formo :

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{2\omega}{2n(2\omega)\varepsilon_0 c} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(2\omega; \omega, \omega) A_1^2 e^{i\Delta kz} \quad [103]$$

kie $\Delta k = 2k_\omega - k_{2\omega} = 2\omega(n_\omega - n_{2\omega})/c$. Ofte oni uzas notacieron d_{efk} kiu difiniĝas kiel:

$$d_{efk} = \frac{\chi^{(2)}}{2} \quad [104]$$

kaj do :

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{i\omega d_{efk}}{n_{2\omega} c} A_1^2 e^{i\Delta kz} = i\kappa_2 A_1^2 e^{i\Delta kz} \quad [105]$$

En la ekvacio, κ_2 estas parametro kiu montras efikecon de generado de dua harmono. Konsiderante konstantecon de la fundamenta kampo A_1 laŭlonge la akso z, la supra diferenciala ekvacio simple solviĝas :

$$\begin{aligned} A_3(z) &= A_3(0) + i\kappa_2 A_1^2 \frac{e^{i\Delta kz} - 1}{i\Delta k} \\ &= A_3(0) + i\kappa_2 A_1^2 e^{i\Delta kz/2} z \frac{e^{i\Delta kz/2} - e^{-i\Delta kz/2}}{2i\Delta kz/2} \\ &= A_3(0) + i\kappa_2 A_1^2 z e^{i\Delta kz/2} \frac{\sin(\Delta kz/2)}{\Delta kz/2} \end{aligned} \quad [106]$$

Ofte nin interesas procezoj dum kiuj $A_3(0) = 0$, t.e. dekomence ne ekzistas kampo de la dua harmono. En tiuj okazoj oni povas skribi:

$$A_3(z) = i\kappa_2 A_1^2 z e^{i\Delta kz/2} \frac{\sin(\Delta kz/2)}{\Delta kz/2} \quad [107]$$

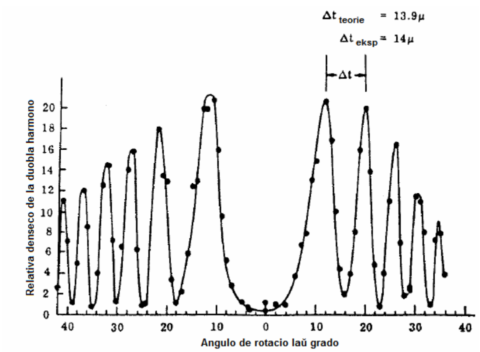
Oni povas uzi la rilatojn $I_\omega = (1/2) n_\omega c\varepsilon_0 |A_1|^2$ kaj $I_{2\omega} = (1/2) n_{2\omega} c\varepsilon_0 |A_2|^2$ por kalkuli densojn de lumondoj en la du frekvencoj. Tiel oni trovas :

$$\begin{aligned} I_{2\omega}(z) &= \frac{2n_{2\omega} |\kappa_2|^2 z^2}{n_\omega^2 c\varepsilon_0} I_\omega^2 \frac{\sin^2(\Delta kz/2)}{(\Delta kz/2)^2} \\ &= \frac{2\omega^2 d_{efk}^2 z^2}{n_\omega^2 n_{2\omega} c^3 \varepsilon_0} I_\omega^2 \frac{\sin^2(\Delta kz/2)}{(\Delta kz/2)^2} \end{aligned} \quad [108]$$

Studante la ekvacion [108] oni trovas ke :

- Kiam la fazoj de ondoj akordas, $\Delta k = 0$, la denso de la generata dua harmono, $I_{2\omega}$, estas proporcia al kvadrato de denso de la fundamenta ondo, I_ω. Samtempe la denso de la generata dua harmono ankaŭ estas proporcia al la longo z^2 tra kiu la ondoj en la nelineara medio propagiĝas.
- La denso de la generata dua harmono proporcias al $[d_{efk}]^2$ aŭ alivorte $[\chi^{(2)}]^2$.
- Kiam la fazoj de ondoj ne akordas, $\Delta k \neq 0$, la denso de la generata dua harmono varias laŭ $[\sin^2(\Delta kz/2)]/(\Delta kz/2)^2$. Kalkulante derivaĵon de [108] laŭ longo z kaj metante ĝin egala al nul oni trovas tiun longon de la nelineara medio tra kiu la efiko de generado de dua harmono estas maksimuma kaj ĝi estas $l_k = \pi/\Delta k$. Ĝi nomiĝas *koherlongo* kaj estas la plej

granda longo de la nelineara medio kiu efikas sur generadon de dua harmono.



Bildo 4 – Variado de denso de la generata dua harmono pro ŝanĝo de angulo de propagiĝo de lumo en kristalo.

Por trovi *la koherlongon* oni povas skribi :

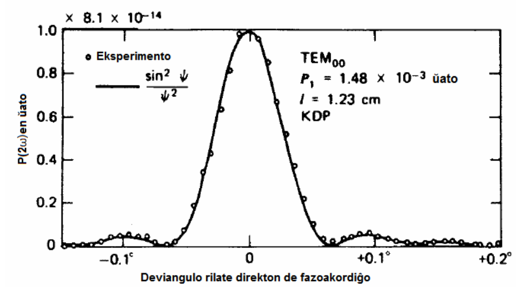
$$\Delta k = 2k_\omega - k_{2\omega} = 2\omega(n_\omega - n_{2\omega})/c,$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow l_k = \frac{\lambda}{4(n_\omega - n_{2\omega})} \quad [109]$$

Nun ni kalkulas koherlongon por vera medio. Ni supozas ke uzante kristalon KDP oni duobligas la frekvencon de infraruĝa lumoradio je ondolongo 1 µm. Rezulto de tiu procezo estas kreiĝo de lumoradio je ondolongo 500 nm (kiu estas videbla). En kristalo KDP oni havas :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 10^{-6}\ \text{m};\ n_1 = 1.50873 \\ \lambda_2 &= 5\times10^{-7}\ \text{m};\ n_2 = 1.529833 \end{aligned}\right\} \Rightarrow l_k = 1.18\times10^{-5}\ \text{m}$$

Tio estas maksimuma longo kiu efikas en generado de dua harmono en kristalo KDP kiam $\Delta k \neq 0$. Oni vidas ke por pli bone utiligi longecon de nelineara medio necesas ke $\Delta k \approx 0$. Kaj por atingi tiajn kondiĉojn necesas ke $n_{2\omega}$ kaj n_ω estu laŭeble proksimaj unu al la alia. Bedaŭrinde ofte sub ordinaraj kondiĉoj tiuj du kvantoj estas malfavore malproksimaj. Tial oni uzu metodojn por atingi $\Delta k \approx 0$. Tiajn metodojn oni nomas metodoj por *fazoakordigo*. Ni studos kelkajn el tiaj metodoj, sed antaŭ tio ni devas korekti nian rigardon al propagiĝo de lumoradio en trapasebla medio.



Bildo 5 – Vario de denseco de la generata dua harmono laŭ deviangulo rilate direkton de fazoakordiĝo.

5.1. Propagiĝo de lumo en neizotropa medio

Ĝis nun ni traktis polarizeblon kiel skalaron kaj plejparte ignoris vektoran naturon de elektra kampo de lumondo. Tio okazis ĉar ĝis nun ni supozis ke optikaj trajtoj de medio ne dependas de la direkto laŭlonge de kiu la lumondo propagiĝas. Tiu supozo validas dum ni studas propagiĝon de lumo en *izotropaj medioj*. En neizotropa medio la direkto kaj grando de polarizo **P** kaj la delokiĝo **D** dependas de direkto de elektra kampo kiu kaŭzas ilin. Tial la ekvacio [7] devas skribiĝi en formo :

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0\left(\chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z\right) \\ P_y &= \varepsilon_0\left(\chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z\right) \\ P_z &= \varepsilon_0\left(\chi_{31}E_x + \chi_{31}E_y + \chi_{33}E_z\right) \end{aligned} \quad [110]$$

La ekvaciojn oni povas skribi ankaŭ en matrica formo :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad [111]$$

La 3 × 3-a matrico χ_{ij} nomiĝas *tensoro de la elektra polarizeblo*. En formo pli konciza oni povas skribi la grupon de ekvacioj [110] en formo :

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad [112]$$

kiu laŭ konvencio montras adicion sur la ripetataj indicoj – ĉi tie sur la indico *j*. Tiu ekvacio enfakte signifas :

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} E_j \quad [113]$$

Depost nun ni uzos la koncizigan konvencion kiun ni uzis en la ekvacio [112] por skribi formulojn kiujn ni devas uzi por studi la propagiĝon de lumondo en neizotropa medio. Sammaniere oni povas skribi vektoron de elektra delokiĝo en formo :

$$D_i = \varepsilon_0 \left(1+\chi_{ij}\right) E_j = \varepsilon_{ij} E_j \qquad [114]$$

en kiu la tensoro de elektra polarizeblo, χ_{ij}, estas anstataŭigita per *tensoro de elektra permitivo*, ε_{ij}. Por nia celo sufiĉas studi propagiĝon de ebena ondo kiun oni povas priskribi determinante ĝiajn elektran kaj magnetan kampojn :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

En la ĉi-supraj ekvacioj **k** estas *la onda vektoro* kiu donas la direkton de la propagiĝo. Oni povas skribi la ekvaciojn de Maxwell por propagiĝo de ebena ondo en neizotropa medio. Por fari tion oni povas meti -i**k**× anstataŭ ∇×, -i**k**· anstataŭ ∇· kaj iω anstataŭ ∂/∂t. Tiel la ekvacioj de Maxwell povas reskribiĝi kiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mu_0\mathbf{H} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{H} &= -\omega\mathbf{D} \end{aligned} \qquad [115]$$

Uzante tiujn ekvaciojn oni povas reskribi la ondoekvacion :

$$\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right) = \omega\mu_0\mathbf{k}\times\mathbf{H} = \omega\mu_0(-\omega\mathbf{D}) \qquad [116]$$

Nun ni uzas la vektoran rilaton :

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A} \qquad [117]$$

kaj trovas :

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = -\mu_0\omega^2\mathbf{D} \qquad [118]$$

kiu rezultigas :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\omega^2\mu_0}\left[k^2\mathbf{E} - \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{k}\right] \qquad [119]$$

Ni konsideras tiun sistemon de koordinatoj kiu estas akorda kun *la ĉefaj dielektrikaj aksoj* de la medio. En tia sistemo oni povas skribi:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \qquad [120]$$

en kiu kompreneble la elektra permitivo de la medio laŭlonge de diversaj aksoj povas esti malsamaj. Tio rezultigas ke por i=x, y, z oni havas :

$$D_i = n^2\varepsilon_0\left[\frac{D_i}{\varepsilon_i} - s_i\left(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E}\right)\right] \qquad [121]$$

kie la vektoro **s** estas la unuovektoro en la direkto de propagiĝo de la ondo, do en la direkto de la vektoro **k** tiel ke :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{s} \qquad [122]$$

Oni povas reskribi la ekvacion [121] en formo :

$$D_i = \frac{\varepsilon_0\left(s\cdot E\right)}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i}} s_i \qquad [123]$$

kaj kalkuli la skalaran produton **D**·**s** = $D_x s_x + D_y s_y + D_z s_z$ kiu estas nul ĉar la du vektoroj **D** kaj **s** estas ortaj. Do oni povas skribi :

$$\frac{s_x^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_x}} + \frac{s_y^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_y}} + \frac{s_z^2}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_z}} = 0 \qquad [124]$$

Tiu ekvacio nomiĝas *la ekvacio de Fresnel*. Ĝi estas kvadrata rilate la variablon n kaj do havas du sendependajn solvojn n' kaj n''. Pro tio, en neizotropa medio ankaŭ ekzistas du sendependaj ondoj, $D'(n')$ kaj $D''(n'')$, kiuj obeas la ekvacion de Fresnel.

Konsideru ebenan ondon kun polarizo miksita el du polarizeroj D' kaj D'' kiu incidas surfacon. Tiu parto de la ondo kies polarizo estas D' refraktiĝas laŭ la refraktindico n', dum la ondo kun polarizo D'' refraktiĝas laŭ n''. Tiu malsameco de refraktiĝo kaŭzas ke la ondo disiĝas al du partoj kaj ili propagiĝas en la medio laŭ malsamaj anguloj. La reguloj de difraktiĝo postulas ke :

$$k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \qquad [125]$$

en kiu k_0 estas konstanto de propagiĝo en la unua medio, θ_0 la angulo de incido, k_1 konstanto de propagiĝo en la neizotropa medio por unu el la polarizoj kaj k_2 tiu konstanto por la alia polarizo. θ_1 kaj θ_2 estas la anguloj laŭ kiuj la du polarizeroj refraktiĝas.
Tiu malsameco de refraktanguloj klarigas la fenomenon de *duobla refraktiĝo* kaj la aperon de du bildoj en neizotropaj medioj.

La energi-enhavo de elektromagneta kampo en iu medio estas :

$$U_e = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right) \qquad [126]$$

En koordinata sistemo kiu estas en akordo kun la dielektrikaj ĉefaksoj (x, y, z) oni havas $D_i = \varepsilon_i E_i$, i = x, y, z. Do tiu surfaco de la spaco sur kiu energi-enhavo de la elektromagneta kampo estas konstanta kalkuliĝas per ekvacio :

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_y}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_z}=2U_e \qquad [127]$$

Metante **r** (kiu rilatas ortan polarizan vektoron) anstataŭ $\mathbf{D}\sqrt{2U_e}$ kaj uzante la rilaton $n_i^2 = \varepsilon_i$, la ekvacio [127] skribiĝas kiel la ekvacio de tri-dimensia elipso en formo :

$$\frac{x^2}{n_x^2}+\frac{y^2}{n_y^2}+\frac{z^2}{n_z^2}=1 \qquad [128]$$

Per tiu ekvacio oni povas trovi refraktindicojn kiuj efikas sur ĉia specifita polarizo en neizotropa medio. Ekzemple en kazo de *unuaksa kristalo* du refraktindicoj estas egalaj. Do ebeno sekcanta ĝin orte al unu el la optikaj aksoj formas *cirklon*. Se konsideri ke z estu akso ĉirkaŭ kiu la elipso de refraktindicoj havas cilindran simetrion tiam la principaj refraktindicoj por ondo kiu propagiĝas laŭlonge de tiu akso estos :

$$n_o^2=\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}=\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_0} \text{ kaj } n_e^2=\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \qquad [129]$$

kaj la ekvacio de refraktindicoj iĝas :

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1 \qquad [130]$$

Por ondo kies propagiĝo havas angulon θ kun la optika akso z, la sekcio orta al la propagiĝo kaj la elipso de refraktindicoj ne estas cirklo sed elipso. Por *la eksterordinara parto* de la propagiĝo oni povas skribi :

$$n_e^2 = z^2 + y^2$$
$$\frac{z}{n_e(\theta)}=\sin\theta \qquad [131]$$

kaj ekvacio de la sekca elipso estas :

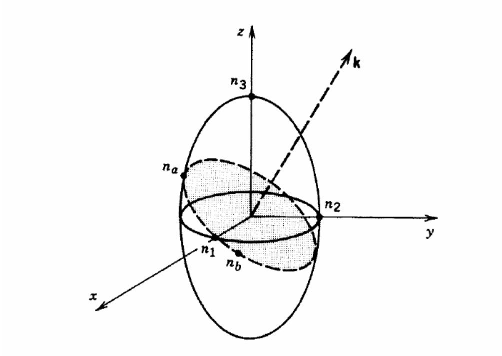
$$\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1 \qquad [132]$$

Uzante la ekvaciojn [131] kaj [132] oni trovas :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)}=\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \qquad [133]$$

Kiam $\theta = 0$, la ondo propagiĝas laŭlonge de la optika akso kaj duobla refraktiĝo ne okazas ($n_e(0) - n_o = 0$). Sed kiam la angulo θ ne estas nul, la grando de duobla refraktiĝo ($n_e(\theta) - n_o$) dependas de la direkto de

propagiĝo kaj ĝia maksimumo okazas kiam la ondo propagiĝas orte al la optika akso, $\theta = 90°$.



*Bildo 6 – Elipso de refraktindicoj. Tie **k** estas la ondovektoro.*

5.2. Fazoakordigo en neizotropa medio

Kiel vidite en la ĉapitro 5, por uzi la maksimuman efikecon de medio por generado de dua harmono, la fazoj de la du ondoj je frekvencoj fundamenta kaj duobla devas esti akordaj: $\Delta k = 0$. Pro la rilato $k = n\omega/c$, la akordo de fazoj postulas ke :

$$k^{(2\omega)}=2k^{(\omega)} \Rightarrow \frac{n^{(2\omega)}(2\omega)}{c}=\frac{2n^{(\omega)}\omega}{c} \Rightarrow n^{(2\omega)}=n^{(\omega)} \qquad [134]$$

Por ordinara lumoradio en ĉiu medio ĉiam ekzistas disperso kaj pro tio ĉiam $n(2\omega) > n(\omega)$. En neizotropa medio tamen eblas miksi ordinaran kaj eksterordinaran ondojn kaj atingi akordon inter iliaj fazoj. En la antaŭa ĉapitro ni vidis kiel eblas ŝanĝi refraktindicon kiu efikas sur eksterordinara parto de la lumoradio ŝanĝante la angulon kiu estas inter la ondovektoro ***k*** kaj la optika akso de la medio θ :

$$n_e(\theta)=\frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}} \qquad [135]$$

Kompreneble ankoraŭ por ĉiuj el la refraktindicoj n_o kaj n_e ekzistas disperso. Tio signifas ke en diversaj ondolongoj la eksterordinaraj kaj ordinaraj partoj de la ondo propagiĝas sub efiko de diversaj refraktindicoj. Tial ankoraŭ ne eblas atingi akordon de fazoj konsiderante nur unu el tiuj du partoj. Tio postulas ke aŭ $n_o^{\omega} = n_o^{2\omega}$ aŭ $n_e^{2\omega}(\theta) = n_e^{\omega}(\theta)$ [n_e^{ω} signifas la ekstraordinaran refraktindicon de la medio por lumoradio kun frekvenco ω, $n_o^{2\omega}$ ĝian ordinaran refraktindicon por lumoradio kun frekvenco 2ω, k.t.p]. Ĉu eblas trovi angulon (por akordo de fazoj) en kiu $n_e^{2\omega}(\theta_a) = n_o^{\omega}$? Tio povas okazi nur se $n_e < n_o$. Tiam :

$$n_e^{2\omega}(\theta_a) = \frac{n_e^{2\omega} n_o^{2\omega}}{\sqrt{(n_o^{2\omega})^2 \sin^2 \theta_a + (n_e^{2\omega})^2 \cos^2 \theta_a}} = n_o^{\omega} \qquad [136]$$

Solvo de tiu ekvacio por $\sin^2 \theta_a$ estas :

$$\sin^2 \theta_a = \frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}} \qquad [137]$$

Medion en kiu $n_e < n_o$ oni nomas *negative duoble refraktanta*. En la supera procezo oni vidis ke la lumoradio kies frekvenco estas ω estis ordinara do ĝia polarizo estas orta al la optika akso de la medio. Ankaŭ lumoradio de la dua harmono estas eksterordinara do ĝia polarizo estas en la ebeno de la optika akso. Konklude la polarizo de la dua harmono estas orta al la polarizo de la fundamenta lumoradio. Ankaŭ ĉi tie la procezo okazas inter *ordinara fundamenta ondo* kaj *eksterordinara ondo de la dua harmono*. En sama maniero eblas montri ke en *pozitive duoble refraktanta* medio (en kiu $n_o < n_e$) la procezo nur eblas inter *ordinara ondo de la dua harmono* kaj *eksterordinara fundamenta ondo*. Aliflanke eblas konsideri generadon de la dua harmono kiel miksiĝon de du ondoj por rezultigo de ilia sumo. Supozante tion, oni konsideras ke la fundamenta ondo miksiĝas kun si mem kaj rezultigas la duan harmonon. Tiuokaze la kondiĉo de la fazoakordo $\mathbf{\Delta k} = 0$ reduktiĝas al :

$$n_e^{2\omega}(\theta) = \frac{1}{2}\left[n_o^{\omega} + n_e^{\omega}(\theta) \right] \qquad [138]$$

Tiu kondiĉo povas okazi por certa angulo θ_a en medio negative duoble refraktanta. En medio pozitive duoble refraktanta alia kondiĉo postuliĝas :

$$n_o^{2\omega} = \frac{1}{2}\left[n_o^{\omega} + n_e^{\omega}(\theta) \right] \qquad [139]$$

En ambaŭ okazoj $n_e^{\omega}(\theta)$ kaj/aŭ $n_e^{2\omega}(\theta)$ povas esprimiĝi per kvar parametroj $n_e^{\omega}(\theta)$, n_o^{ω}, $n_e^{2\omega}$ kaj $n_o^{2\omega}$. Evidentas ke en tiuj du kazoj la anguloj por fazoakordiĝo ne estas samaj, kvankam kaŭze de ambaŭ procezoj la frekvenco de lumoradio duobliĝas. Ofte oni jene distingas inter diversaj tipoj de la fazoakordigo ;

- Fazoakordigo de tipo I:

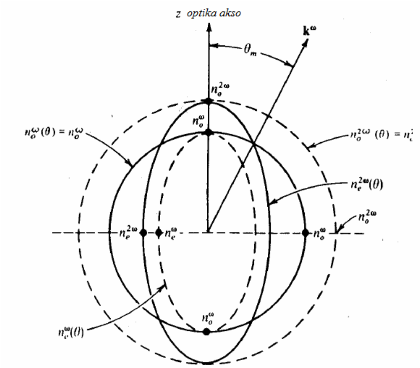
$E_o^{\omega} + E_o^{\omega} = E_e^{2\omega}$ negative duoble refraktanta medio

$E_e^{\omega} + E_e^{\omega} = E_o^{2\omega}$ pozitive duoble refraktanta medio

- Fazoakordigo de tipo II:

$E_o^{\omega} + E_e^{\omega} = E_e^{2\omega}$ negative duoble refraktanta medio

$E_o^{\omega} + E_e^{\omega} = E_o^{2\omega}$ pozitive duoble refraktanta medio



Bildo 7 – Ortaj surfacoj de refraktindico por ordinara kaj eksterordinara lumoradioj en kristalo negative duoble refraktanta ($n_e < n_o$) kaj unuaksa. Se $n_e^{2\omega} < n_o^{\omega}$, la kondiĉo $n_e^{2\omega}(\theta) = n_o^{\omega}$ okazas por $\theta = \theta_m$.

Kiel ekzemplon konsideru generadon de dua harmono por lumoradio elsendita de Nd : JAG-a lasero je ondolongo 1064 nm (infraruĝo). La rezulto estos lumoradio je frekvenco 532 nm (verda koloro). Ni supozas ke por generi tiun frekvencon oni uzas kristalon KDP kiu estas negative duoble refraktanta medio kaj en ĝi eblas fari fazoakordigon de tipo I. Tiuokaze oni havas:

$$n_o(1064\text{ nm}) = 1.494$$

$$n_o(532\text{ nm}) = 1.512, \; n_e(532\text{ nm}) = 1.471$$

Solvante la ekvacion [137] oni trovas angulon de la fazoakordiĝo $\theta_a = 41°$.

5.3. Malakordiĝo de fazoj

En neizotropa medio la elipsa naturo de refraktindicoj kaŭzas ke la ordinara ondo propagiĝas en direkto kiu havas angulon kun propagdirekto de la eksterordinara ondo. Aliflanke por generado de dua harmono necesas kombinaĵo de du ondoj ordinara kaj eksterordinara, sed pro la menciita kialo post iom da propagiĝo ili apartiĝas unu for de la alia. Tio kaŭzas ke ili ne plu kovros unu la alian kaj generado de dua harmono haltos. Por studi tion supozu fazoakordigon de tipo I en negative duoble refraktanta medio. La akordo de fazoj postulas:

$$\Delta k = \frac{2\omega}{c}\left[n_e^{2\omega}(\theta) - n_o^{\omega}\right] = 0 \qquad [140]$$

Tio kiel vidite okazas por certa angulo θ_a. Por kalkuli Tejloran ekspansion ĉirkaŭ la angulo de fazoakordiĝo (θ - θ_a), la unua derivaĵo de Δk rilate variadon de angulo θ, estas:

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{2\omega}{c}\frac{d}{d\theta}\left[n_e^{2\omega}(\theta) - n_o^{\omega}\right] = \frac{2\omega}{c}\frac{d}{d\theta}\frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}}$$

$$= -\frac{\omega}{c}\frac{n_e n_o}{\left[n_o^2 \sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta\right]^{3/2}}\left(n_o^2 - n_e^2\right)\sin 2\theta \qquad [141]$$

$$= -\frac{\omega}{c}\frac{\left[n_e^{2\omega}(\theta)\right]^3}{n_e^2 n_o^2}\left(n_o^2 - n_e^2\right)\sin 2\theta$$

do oni trovas:

$$\left.\frac{dk}{d\theta}\right|_{\theta_a} = -\frac{\omega}{c} n_o^3 (n_e^{-2} - n_o^{-2})\sin 2\theta_a \qquad [142]$$

Por trovi ĉi-tiun ekvacion oni devas konsideri ke $n_e^{2\omega}(\theta) = n_o$ kaj la variablo θ estas egaligita al θ_a. Oni vidas ke la etendo de permesitaj k-valoroj estas proporcia al la etendo de anguloj ĉirkaŭ la fazoakordiĝa angulo θ_a:

$$\Delta k = \frac{2\beta}{L}\Delta\theta \qquad [143]$$

en kiu :

$$\beta \propto \sin 2\theta_a \qquad [144]$$

Konsiderante la ekvacion [108] la povo de la generata dua harmono estas:

$$P^{(2\omega)}(\theta) \propto \frac{\sin^2\left[\frac{\Delta kL}{2}\right]}{\left[\frac{\Delta kL}{2}\right]^2} \propto \frac{\sin^2\left[\beta\left(\theta - \theta_a\right)\right]}{\left[\beta\left(\theta-\theta_a\right)\right]^2} \qquad [145]$$

Tiu rilato inter devio disde la fazoakordiĝa angulo kaj la povo de la generata dua harmono povas kompreniĝi diversmaniere ;

- Por iu certa ondolongo λ la devio de fazoakordiĝa angulo ne povas esti pli ol certa valoro se la rendimento de la procezo ne malpliiĝas.
- En kazo de lumofasko kies diversaj partoj estas samdirektaj la amplekso de la ondovektoro rilatas al la amplekso de la ondolongo:

$$\frac{\Delta k}{k} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \qquad [146]$$

Tiam pro malakordiĝo de fazoj pro devieco de angulo, nur limigita amplekso de la ondolongoj ĉirkaŭ la centra ondolongo efike donas sian energion al ondoj kun duoblaj frekvencoj.
Oni ankaŭ vidas ke por fazoakordiĝo en angulo θ_a = 90° la unua termo en la Tejlora ekspansio estas nul. Tiam oni devas konsideri la duan termon de la ekspansio do:

$$\Delta k \propto \left(\Delta\theta\right)^2 \qquad [147]$$

En tia kazo malgranda amplekso de angulo $\Delta\theta$ permesas duobliĝon de frekvenco por granda amplekso de ondovektoro. Ankaŭ la amplekso de ondolongoj kiuj efike duobliĝas estas pli granda. Tiu ĉi efiko por fazoakordiĝo en angulo θ_a = 90° nomiĝas *nekrita fazoakordigo*.

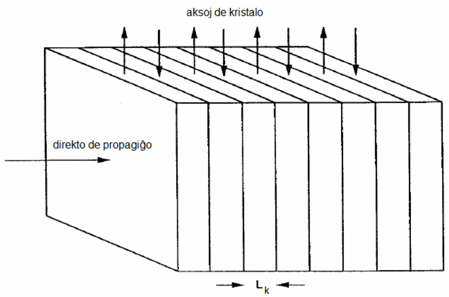
5.4. Fazoakordigo per agordado de la temperaturo

Ĝis nun ni supozis ke la refraktindicoj en medio dependas nur de propagiĝodirekto kaj polarizo de tiu ondo kiu en la medio propagiĝas. Fakte la refraktindicoj dependas de ĉiu ekstera parametro kiu povas influi la strukturon de la medio (ekzemple internajn distancojn de latiso en kristalaj medioj). Pro tio ĉio, principe ĉiuj kvar parametroj n_e^{ω}, n_o^{ω}, $n_e^{2\omega}$ kaj $n_o^{2\omega}$ dependas de *la temperaturo*. Do, estas facile kompreneble, kial eblas atingi la kondiĉon de la fazoakordiĝo, Δk = 0, agordante la temperaturon de la medio. Ĉiuokaze ankoraŭ la angulo de eniĝo de la lumoradio en medion estas grava. Ekzistas kristaloj (kiel KDP) kiuj estas aparte konvenaj por fazoakordigo per agordado de la temperaturo. En tiaj kristaloj eĉ iam eblas atingi fazoakordiĝon por θ_a = 90°. Tiam ĉiuj avantaĝoj de nekrita fazoakordiĝo ekzistas. Kiel ekzemplo eblas duobligi frekvencon de lumoradio elsendita de Nd:JAG-a lasero (je ondolongo 1064 nm) uzante la kristalon MgO:LiNbO3 en 100°C. La procezo de la fazoakordiĝo en tiu kristalo estas de tipo I, kaj la rezulto estas nekrita fazoakordiĝo. Tiel:

$$2\omega n_e^{2\omega}(\theta = 90°, \mathrm{T} \approx 100°\mathrm{C}) = 2[\omega n_o^{\omega}(\mathrm{T} \approx 100°\mathrm{C})]$$

5.5. Kvazaŭa fazoakordigo per strukturoj periode polarizitaj

En fazoakordigo per agordado de angulo kelkaj anguloj por propagiĝo de lumoradio en la medio ne estas permesataj. Tio kaŭzas ke oni ne povas utiligi ĉiujn eblojn de la medio. Por solvi tiun problemon oni disvolvis la metodon de kvazaŭa fazoakordigo. Kiel ni en la ĉapitro 5 vidis, la maksimuma longo kiu efikas en generado de dua harmono egalas la koherlongon l_k. Tio estas ĉar pro disperso en la medio la fazo de ondo kun duobla frekvenco ŝanĝiĝas rilate la fundamentan ondon pro malsameco de la propagiĝorapidoj de ondoj. Post ĉiu koherlongo la diferenco de fazoj por la du ondoj fundamenta kaj dua harmona iĝas $\pi/2$ radianoj. Ekde tiu longo la fluo de energio (kiu unue estis el la fundamenta ondo al tiu de la dua harmono) inversiĝas kaj la ondo de la dua harmono ne plu ricevas energion sed perdas ĝin.



Bildo 8 – Kvazaŭa fazoakordigo per uzado de strukturo periode polarizita en optike nelineara kristalo.

En kvazaŭa fazoakordigo per strukturoj periode polarizitaj oni provas akomodi diferencon inter la relativaj fazoj per strukturoj kies tavoloj estas periode polarizitaj. En tiu metodo segmentoj de materio kiuj havas alternajn optikajn aksojn stakiĝas unu apud la aliaj. El vidpunkto de la propagiĝanta ondo la segmentoj estas turnitaj unu rilate la antaŭan je angulo 180°. Tiel diferenco de relativa fazo kiu estiĝas post la unua koherlongo malpliiĝas dum propagiĝo tra la sekvanta segmento. La metodo de kvazaŭa fazoakordigo per strukturoj periode polarizitaj estis proponita antaŭlonge en la unuaj tagoj de la nelineara optiko, tamen nur progreso de produktaj teknologioj ebligis ĝian realiĝon. Eblas stakigi alternajn tavolojn da kristalo aŭ per deponado de tavoloj el vaporo aŭ prilaborante kristalon jam pretan por krei tiajn tavolojn per varmigado kaj aplikado de taŭgaj

elektraj kampoj al ĝiaj diversaj partoj. Por analizo de tiaj aranĝaĵoj oni povas reskribi la ekvacion de la kuplita ondo [105] en formo:

$$\frac{d}{dz}E_2 = \Gamma d(z)\exp\left[-i\Delta k'z\right] \qquad [148]$$

en kiu $\Gamma = i\omega E_1^2/n_2c$. Se konsideri longon de la medio, L, en la fino de tiu distanco la generata la dua harmono estos:

$$E_2(L) = \Gamma\int_0^L d(z)\exp\left[-i\Delta k'z\right]dz \qquad [149]$$

En ordinara kazo kie $d(z) = d_{efk}$ kaj $\Delta k' = 0$ la elektra kampo de la dua harmono estas:

$$E_2(L) = \Gamma d_{efk} L \qquad [150]$$

Aliflanke por strukturo periode polarizita oni povas supozi ke la funkcio $d(z)$ estas konsistanta el regionoj en kiuj la signumo de d_{efk} ŝanĝiĝas (ĝi iĝas $\pm d_{efk}$) kaj tio okazas en pozicioj z_j. Ni montras tiun ŝanĝiĝantan signumon per g_k kaj supozas ke la longo de la k-a regiono estu l_k. Nun la ekvacio [149] povas esti integrita kiel:

$$E_2 = \frac{i\Gamma d_{efk}}{\Delta k'}\sum_{k=1}^{N} g_k\left[\exp\left(-i\Delta k'z_k\right) - \exp\left(-i\Delta k'z_{k-1}\right)\right] \qquad [151]$$

kun la nombro de regionoj N. La ŝanĝiĝo de la signumoj okazas en la pozicio:

$$e^{-i\Delta k_0'} z_{k,0} = (-1)^k \qquad [152]$$

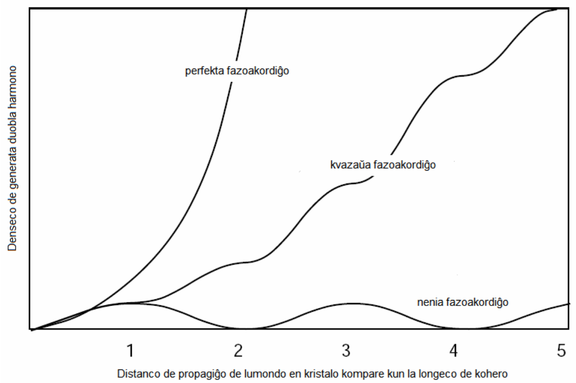
kie $\Delta k'_0$ estas malakordo inter la fazoj en la specifita ondolongo. Por kvazaŭa fazoakordigo je grado m oni havas:

$$z_{k,0} = mkl_c \qquad [153]$$

Por perfekta strukturo sen fazoeraroj en la limoj la generata elektra kampo estas:

$$E_{2,ideala} \approx i\Gamma g_1 d_{efk}\frac{2}{m\pi}L \qquad [154]$$

Oni vidas ke por kvazaŭa fazoakordiĝo je grado m la efika nelineareco malpliiĝas je kvanto $2/m\pi$ kompare al la fazoakordigo per agordado de angulo.



Bildo 9 – Evoluo de denso de dua harmono kiam la fazoj estas perfekte, kvazaŭe kaj neniel akordaj.

5.6. Forkonsumiĝo de energio for de la fundamenta lumoradio

En studo de generado de dua harmono ni supozis ke fluo de energio el la fundamenta lumondo al la generata dua harmono ne kaŭzas ŝanĝon en denso de la fundamenta lumo. Tio ĝustas tiam kiam oni supozas ke efikeco de procezo estas malgranda, $\eta_{gdh} << 1$. Ĉi tie η_{gdh} estas proporcio de energio fluinta al la generata dua harmono rilate dekomencan energion de la fundamenta lumoradio. En kazo de konsidereblaj efikecoj de procezo rilate generadon de dua harmono aliaj procezoj ankaŭ devas konsideriĝi. Ĝenerale kiam oni konsideras generadon de dua harmono kiel aperon de suma frekvenco kaŭze de interago de lumoradio kun si mem, t. e. *sumiĝo de du frekvencoj* kiu rezultigas estiĝon de ondo kies frekvenco estas sumo de frekvencoj de du unuaj lumoradioj, tiam en kazo de konsiderebla denseco de la rezulta lumoradio ankaŭ inversaj procezoj devas konsideriĝi:

$$\omega_1 + \omega_2 \to \omega_3$$
$$\omega_3 - \omega_2 \to \omega_1$$
$$\omega_3 - \omega_1 \to \omega_2$$

Nun oni povas uzi la ekvacion [101] por skribi ekvaciojn kiuj priskribas evoluon de elektra kampo rilate tiujn ĉi lumoradiojn. Por plisimpligi la rezulton oni povas skribi:

$$A_i = \frac{\sqrt{n_i}}{\omega_i} E_i \qquad [155]$$

kaj

$$\kappa = d \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{n_1 n_2 n_3}} \qquad [156]$$

Tiam la ekvacioj por evoluo de amplitudoj iĝas :

$$\frac{d}{dz} A_1 = -i\kappa A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz}$$
$$\frac{d}{dz} A_2 = +i\kappa A_3 A_1^* e^{i\Delta kz} \qquad [157]$$
$$\frac{d}{dz} A_3 = -i\kappa A_1 A_2 e^{i\Delta kz}$$

En kazo de generado de dua harmono oni havas $\omega_1 = \omega_2$ kaj ni ankaŭ supozas ke la fazoj estu akordaj, $\Delta k = 0$. Do eblas skribi:

$$\frac{d}{dz} A_1 = -i\kappa A_3 A_1^*$$
$$\frac{d}{dz} A_3 = -i\kappa \frac{1}{2} A_1^2 \qquad [158]$$

Tie oni aldonas la termon ½ ĉar du el la ekvacioj kuniĝas por esprimiĝi per nur unu ekvacio. Supoziĝas ke dekomenca amplitudo $A_1(0)$ estas reela kaj ankaŭ oni reskribas $-iA_3 = A_3'$, do troviĝas:

$$\frac{d}{dz} A_1 = -\kappa A_3' A_1$$
$$\frac{d}{dz} A_3' = \frac{1}{2} \kappa A_1^2 \qquad [159]$$

Kalkulante

$$\frac{d}{dz}\left[A_1^2 + 2\left(A_3'(z)\right)^2 \right] = 2A_1 \frac{d}{dz} A_1 + 4A_3' \frac{d}{dz} A_3' = 0 \qquad [160]$$

do en la medio (supozante ke en la komenco ne estis kampo rilate al ω_3) :

$$\left[A_1^2 + 2\left(A_3'(z)\right)^2 \right] = \text{konstanta} = A_1^2(0) \qquad [161]$$

Konsiderante:

$$I_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} n_i \left|E_i\right|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \omega_i \left|A_i\right|^2 \qquad [162]$$

kaj ankaŭ:

$$I_i \propto N_i h\omega_i \qquad [163]$$

Oni trovas ke $|A_i|^2$ estas proporcia al la nombro de fotonoj kiuj havas frekvencojn ω_i. Do la fakto ke $[A_1^2(z) + 2A_3'(z)^2]$ = konstanta havas tiun fizikan signifon ke anstataŭ ĉiuj du fotonoj elprenitaj el la fundamenta ondo unu fotono kun duobla frekvenco estas generita. Tio estas esprimo de *konserviĝo de energio* ĉar $\omega_3 = 2\omega_1$. La diferenciala ekvacio por A_3' estas:

$$\frac{d}{dz}A_3' = -\frac{1}{2}\kappa\left[A_1^2(0) - 2(A_3')^2\right] = 0 \qquad [164]$$

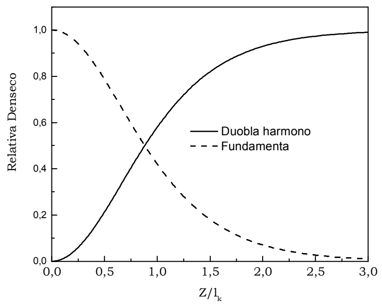
kaj ĝia solvo estas:

$$A_3'(z) = \frac{A_1(0)}{\sqrt{1/2}}\tanh\left[\frac{A_1(0)\kappa z}{\sqrt{1/2}}\right] \qquad [165]$$

Por efikeco de la procezo oni povas skribi:

$$\eta_{gdh} = \frac{P^{(2\omega)}}{P^{(\omega)}} = \frac{|A_3(z)|^2}{\frac{1}{2}|A_1(0)|^2} = \tanh^2\left[\frac{A_1(0)\kappa z}{\sqrt{1/2}}\right] \qquad [166]$$

Ĉi tie se $A_1(0)\kappa z \to \infty$, tiam $A_3'(z) \to A_1(0)/\sqrt{(1/2)}$ kaj do $|A_3'(z)|^2 \to 2|A_1(0)|^2$. La rezulto montras ke *rendimentoj pli ol 50%* por generado de dua harmono eblas.



Bildo 10 – Evoluo de densoj de fundamenta lumoradio kaj dua harmono kiam energio de la fundamenta lumoradio forkonsumiĝas .

6. Parametra amplifo

Alia procezo rilata al la dua grado de la polarizeblo estas *parametra amplifo*. En tiu ĉi procezo du lumoradioj eniras en nelinearan medion. Unu el ili, tiu kun pli granda denso, havas frekvencon ω_3 (*la pumpa*

radio) kaj la alia frekvencon ω_1 (*la signala radio*). En kazo de akordo inter fazoj, la pli densa pumpa radio amplifas la maldensan radion laŭ la nelineara procezo:

$$\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$$

Kiel vidiĝas, rezulte de tiu ĉi procezo alia lumoradio kun frekvenco ω_2 estiĝas. Tiu alia lumoradio nomiĝas *la idla radio*. Ankaŭ ĉi tie simile al la ekvacioj [157] oni povas skribi ekvaciojn, kiuj priskribas evoluon de amplitudoj de la elektraj kampoj por la tri radioj:

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2}i\kappa A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz} \qquad [167]$$

kaj

$$\frac{dA_2^*}{dz} = \frac{1}{2}i\kappa A_1 A_3^* e^{i\Delta kz} \qquad [168]$$

Oni povas supozi, ke la energio de la pumpa radio ne forkonsumiĝas, do $A_3(z) = A_3(0)$. Aliflanke supoziĝas, ke la fazoj akordas, do $\Delta k = 0$. Krome, oni difinas

$$g = \kappa A_3(0) \qquad [169]$$

Per ĉi tiuj supozoj kaj la difino [169], la ekvacioj [167] kaj [168] reduktiĝas al

$$\frac{dA_1}{dz} = -\frac{1}{2}igA_2^* \qquad [170]$$

kaj

$$\frac{dA_2^*}{dz} = \frac{1}{2}igA_1 \qquad [171]$$

Alia supozo estas tio, ke la signaloj de la du elektraj kampoj $A_1(0)$ kaj $A_2(0)$ ĉe la eniro estas tre malgrandaj [$A_1(0) = A_2(0) = 0$]. Tiam la solvoj de la ekvacioj [170] kaj [171] estas:

$$A_1(z) = A_1(0)\cosh\left(\frac{gz}{2}\right) \qquad [172]$$

kaj

$$A_2^*(z) = iA_1(0)\sinh\left(\frac{gz}{2}\right) \qquad [173]$$

Por $gz > 0$, bona poksimumo por la denso de la ondoj signala kaj idla estas:

$$|A_1(z)|^2 = |A_2(z)|^2 \propto e^{gz} \qquad [174]$$

Vidiĝas, ke kaj la signala ondo kun la frekvencoj ω_1 kaj la idla ondo kun frekvenco ω_2, amplifiĝas konsumante la energion de la pumpa ondo kiu havas frekvencon ω_3.

En la parametra amplifo, la koeficiento de amplifiĝo povas esti tiom granda, ke la ondoj *signala* kaj *idla* elstariĝas el bruo. Tiam ne necesas enigi la signalan radion en la nelinearan medion. Por evoluo de amplitudoj de la kampoj en la nelineara medio oni povas simile al la ekvacioj [157] skribi:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i\kappa A_3 A_2^* e^{i\Delta kz}\\ \frac{dA_2}{dz} &= i\kappa A_3 A_1^* e^{i\Delta kz}\\ \frac{dA_3^*}{dz} &= -i\kappa A_1^* A_2^* e^{i\Delta kz}\end{aligned} \qquad [175]$$

Oni povas multipliki tiujn ekvaciojn sinsekve per A_1^*, A_2^* kaj $-A_3$ kaj tiel la dekstraj flankoj de la tri ekvacioj egaliĝas, do eblas skribi:

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{dI_1}{dz} = \frac{1}{\omega_2}\frac{dI_2}{dz} = -\frac{1}{\omega_3}\frac{dI_3}{dz} \qquad [176]$$

Tio estas formo de *leĝo de Manley-Rowe* kiu esprimas konserviĝon de fotonoj en nelineara procezo. Laŭ tiu leĝo anstataŭ ĉiu fotono elprenita de ondo de la pumpa radio estiĝas du fotonoj: unu kun la frekvenco de la signala radio, ω_1, kaj la alia kun la frekvenco de la idla radio, ω_2. Eblas meti nelinearan medion en kiu okazas parametra amplifo, en laseran resonancujon kaj tiel konstrui laseron kies eliranta ondolongo povas agordiĝi. Tian aparaton oni nomas *Optika parametra oscilanto* aŭ *OPO*.

7. Nelineara refrakto kaj sorbiĝo

Ĝis nun ni studis tiujn nelinearajn fenomenojn kiuj rilatas al la dua grado de polarizeblo, $\chi^{(2)}$. Diversaj nelinearaj fenomenoj en optiko rilatas al la tria grado de la polarizeblo, $\chi^{(3)}$. Ĉi tie ni limigas nin je studo de nur du el tiaj fenomenoj. Kiel ni en ĉapitro 3.2 vidis, por elektra kampo de nur unu lumoradio en nelineara medio, polarizo povas skribiĝi en formo de la ekvacio [82]. Analoge al la metodo uzita por la dua grado de polarizeblo oni povas trovi ekvacion, kiu priskribas evoluon de amplitudo de ondo kun malrapide varianta envelopo rilata al la tria grado de la polarizeblo. La rezulto estas ekvacio en formo

$$\frac{dA}{dz} = i\frac{\omega}{4nc}\chi^{(3)}(\omega;\omega,-\omega,\omega)\left|A\right|^2 A \qquad [177]$$

Oni povas konsideri, ke la polarizeblo $\chi^{(3)}$ estas kompleksa nombro kaj skribi ĝin en formo $\chi^{(3)} = \chi_r^{(3)} + i\chi_i^{(3)}$. Tion skribante oni havas:

$$\frac{dA}{dz} = i\frac{\omega}{4nc}\left(\chi_r^{(3)} + i\chi_i^{(3)}\right)\left|A\right|^2 A \qquad [178]$$

En iu pli ĝenerala kazo la malrapide varianta amplitudo povas havi komponanton de fazo. Tiam eblas skribi:

$$A(z) = \left|A(z)\right| e^{i\phi(z)} \qquad [179]$$

La ekvacio de propagiĝo iĝos :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\left(\left|A\right|e^{i\phi}\right) = \frac{\omega}{4nc}\left(i\chi_r^{(3)}\left|A\right|^3 e^{i\phi} - \chi_i^{(3)}\left|A\right|^3 e^{i\phi}\right)\\ &\Rightarrow \frac{d\left|A\right|}{dz} + i\left|A\right|\frac{d\phi}{dz} = \frac{\omega}{4nc}\left(i\chi_r^{(3)}\left|A\right|^3 - \chi_i^{(3)}\left|A\right|^3\right)\end{aligned} \qquad [180]$$

Sekve tie estas du ekvacioj de propagiĝo; unu el ili priskribas evoluon de amplitudo de la elektra kampo dum la propagiĝo kaj la alia priskribas evoluon de fazo de la lumondo. Oni povas skribi ilin en formo:

$$\frac{d\left|A\right|}{dz} = -\frac{\omega}{4nc}\chi_i^{(3)}\left|A\right|^3 \qquad [181]$$

kaj

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\omega}{4nc}\chi_r^{(3)}\left|A\right|^2 \qquad [182]$$

El la supraj ekvacioj, la ekvacio [181] kondukas al nelineara sorbiĝo kaj la ekvacio [182] estas pri nelineara refrakto.

7.1. Nelineara sorbiĝo

Por solvi la ekvacion [181] ni multiplikas ĝiajn ambaŭ flankojn per $|A|$. La rezulto estas:

$$\left|A\right|\frac{d\left|A\right|}{dz} = -\frac{\omega}{4nc}\chi_i^{(3)}\left|A\right|^4 = 2\frac{d\left|A\right|^2}{dz} \qquad [183]$$

Ĉar la denso de lumoradio estas $I = (n\varepsilon_0 c/2)|A|^2$ do eblas skribi:

$$\begin{aligned}&\frac{dI}{dz} = -\frac{\omega}{2n^2c^2\varepsilon_0}\chi_i^{(3)} I^2\\ &\Rightarrow \frac{dI}{dz} = -\beta I^2\end{aligned} \qquad [184]$$

Tio estas nelineara sorbiĝo de la lumoradio kaj en ĝi β estas *koeficiento de sorbiĝo de du fotonoj*. La solvo de la ekvacio estas:

$$I(z) = \frac{I(0)}{1+\beta I(0)z} \qquad [185]$$

7.2. Nelineara refrakto

La ekvacio [182] havas solvon en formo:

$$\phi(z) = \frac{\omega}{4nc}\chi_r^{(3)}|A|^2 z \qquad [186]$$

Pro tio eblas skribi la ondon kiu en la medio propagiĝas, kiel:

$$\begin{aligned} E(z,t) &= A(z)\cos[kz + \phi(z) - \omega t] \\ &= A(z)\cos\left[\left(k + \frac{\omega}{4nc}\chi_r^{(3)}|A|^2\right)z - \omega t\right] \end{aligned} \qquad [187]$$

Nun ni uzas $k = n\omega/c$. Troviĝas:

$$E(z,t) = A(z)\cos\left[\left(n + \frac{1}{4n}\chi_r^{(3)}|A|^2\right)\frac{\omega}{c}z - \omega t\right] \qquad [188]$$

Tiel ŝajnas ke la ondo propagiĝas sub influo de nova refraktindico :

$$n_t = n + \frac{\chi_r^{(3)}}{4n}|A|^2 \qquad [189]$$

Tiu nova refraktindico dependas de la denseco de la lumoradio kiu trairas la nelinearan medion. Oni povas skribi ĝin en formo:

$$n_t(I) = n_L + n_{NL}I \qquad [190]$$

en kiu n_L estas lineara refraktindico kaj n_{NL} estas nelineara refraktindico, kiu estas :

$$n_{NL} = \frac{\varepsilon_0 c}{4}\chi_r^{(3)} \qquad [191]$$

Tia refraktindico povas kaŭzi enfokusiĝon de la lumofasko. Tion oni nomas *memenfokusiĝo*.

8. Kvantumaj originoj de nelineara optiko

Antaŭe, kiam ni studis originojn de la nelineara polarizo, ni traktis la problemon laŭ klasika fiziko. Tie ni konsideris, ke la reago de medio (elektronoj kiuj rondiras nukleojn de atomoj en la materio) al la elektra kampo de lumoradio povas priskribiĝi per klasika fiziko. Tio ne estas tute ekzakta maniero por trakti la problemon. Por pli ekzakte studi originojn de nelineara optiko oni devas uzi leĝojn de kvantuma

mekaniko. Ĉi tie supoziĝas ke la leganto jam scias la bazon de tiu ĉi parto de fiziko. Malgraŭ tio ĉio, por konservi simplecon de niaj analizoj, ni ne traktos la problemon tute laŭ kvantuma fiziko. Tial ni ne konsideros elektromagnetan kampon ankaŭ kvantuma, sed nur rigardos al la medio el vidpunkto de kvantuma mekaniko.

Oni povas priskribi kvantuman staton de atomo per funkcio kiu estas solvo por la ekvacio de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}}\Psi \qquad [192]$$

En ĉi tiu ekvacio Ψ estas kvantuma stato de atomo kaj $\hat{\mathbf{H}}$ estas la operatoro de Hamiltono. Ĝi povas skribiĝi en formo:

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{V}}(t) \qquad [193]$$

en kiu $\hat{\mathbf{H}}_0$ estas Hamiltono de atomo libera de efiko de ĉiu ekstera forto kaj $\hat{\mathbf{V}}(t)$ estas interago de la atomo kun ekstera elektromagneta kampo. Ĝi skribiĝas en formo:

$$\hat{\mathbf{V}}(t) = -\hat{\mu}\cdot\hat{E}(t) \qquad [194]$$

en kiu:

$$\hat{E}(t) = \sum_n E(\omega_n)e^{-i\omega_n t} \qquad [195]$$

estas ekspansio de la elektromagneta kampo rilate al ĝiaj frekvencaj komponantoj. Kiam la atomo estas sub influo de neniu ekstera forto, ĝia stato estas en formo:

$$\psi_n(r,t) = u_n(r)e^{-i\omega_n t} \qquad [196]$$

kaj ĝi estas solvo de temponedependa ekvacio de Schrödinger:

$$\hat{H}_0 u_n(r) = E_n u_n(r), \quad E_n = \hbar\omega_n \qquad [197]$$

kiu estas ekvacio rilate karakterizajn kvantojn de energio. La solvo de la ekvacio [197] estas elektita tiel, ke ĝiaj respondoj formas kompletan aron:

$$\int u_m^* u_n d^3r = \delta_{mn} \qquad [198]$$

Kiam atomo estas sub influo de ekstera elektromagneta kampo, por solvi la ekvacion [192] oni devas uzi *la metodon de perturbo*. En tiu metodo la Hamiltono de la sistemo skribiĝas en formo:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}(t) \qquad [199]$$

en kiu λ estas parametro kontinue kaj malrapide varianta inter nul kaj 1. Ĝi montras forton de la interago kiu perturbas sistemon. La kvantuma stato de la sistemo povas skribiĝi kiel polinomo de proprastatoj de la sistemo kiam ĝi ne estas perturbita:

$$\psi(r,t)=\psi^{(0)}(r,t)+\lambda\psi^{(1)}(r,t)+\lambda^2\psi^{(2)}(r,t)+\cdots \qquad [200]$$

Nun ĉiu termo kiu enhavas gradon N de λ, t.e. termo kiu enhavas λ^N, devas esti aparte solvo de la ekvacio de Schrödinger. Tio signifas ke:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial t} &= \widehat{H}_0\psi^{(0)} \\ i\hbar\frac{\partial\psi^{(N)}}{\partial t} &= \widehat{H}_0\psi^{(N)}+\widehat{V}\psi^{(N-1)} \qquad N=1,2,3,\ldots \end{aligned} \qquad [201]$$

Supozante ke la atomo antaŭ perturbo estas en sia baza stato oni trovas:

$$\psi^{(0)}(r,t)=u_g(r)e^{-iE_gt/\hbar} \qquad [202]$$

La energiaj proprafunkcioj de la atomo formas kompletan aron kaj povas uziĝi kiel bazo por priskribi la ondofunkciojn de la pli grandaj gradoj:

$$\psi^{(N)}(r,t)=\sum_l a_l^{(N)}(t)u_l(r)e^{-i\omega_l t} \qquad [203]$$

La amplitudo $a_l^{(N)}$ indikas probablon laŭ kiu la atomo en la tempo t estas en stato $|l\rangle$ se ekspansii la perturbo-ekvacion ĝis la grado N. Enmetante la ekvacion [203] en la ekvaciojn [201] oni trovas aron da ekvacioj por la amplitudoj de la diversaj potencoj:

$$i\hbar\sum_l \dot{a}_l^{(N)}u_l(r)e^{-i\omega_l t}=\sum_l a_l^{(N-1)}\widehat{V}u_l(r)e^{-i\omega_l t} \qquad [204]$$

Oni povas multipliki ambaŭ flankojn de la supra ekvacio per u_m^* kaj integri ilin super tuto de la spaco. La rezulto estas:

$$\dot{a}_m^{(N)}=(i\hbar)^{-1}\sum_l a_l^{(N-1)}V_{ml}e^{i\omega_{ml}t} \qquad [205]$$

Por trovi tiun rezulton oni uzis la rilaton de kompleteco [198] aplikante ĝin al aro da respondoj por neperturbita sistemo. En la supra ekvacio:

$$\begin{aligned} \omega_{ml} &\equiv \omega_m-\omega_l \\ V_{ml} &\equiv \langle u_m|\widehat{V}|u_l\rangle=\int u_m^*\widehat{V}u_n d^3r \end{aligned} \qquad [206]$$

Tuj observiĝas ke sciante la amplitudon de grado $N-1$, t.e. $a_l^{(N-1)}$, oni povas kalkuli la sekvan gradon de amplitudo per integrado:

$$a_m^{(N)}(t)=(i\hbar)^{-1}\sum_l\int_{-\infty}^{t}dt'V_{ml}(t')a_l^{(N-1)}e^{i\omega_{ml}t'} \qquad [207]$$

Fakte la ekvacio [207] reprezentas aron da dinamikaj ekvacioj, per kiuj eblas trovi amplitudon de probablo ĝis ĉiu dezirata grado. La rezultonta ondofunkcio priskribas staton de atomo sub influo de ekstera elektromagneta kampo de la lumoradio. Kiel komencan punkton ni supozas, ke la atomo estas en baza stato, do:

$$a_m^{(0)}=\delta_{mg} \qquad [208]$$

Tiu funkcio de delto nun povas esti enigita en la ekvacion [207]. Ankaŭ laŭ la difino [194] kaj [195] oni povas skribi:

$$\widehat{V}_{ml}(t')=-\sum_k u_{ml}\bullet E(\omega_k)e^{-i\omega_k t'} \qquad [209]$$

en kiu la interŝanĝa dipol-momanto estas:

$$\mu_{ml}=\int u_m^*\widehat{\mu}u_l d^3r \qquad [210]$$

Nun eblas simple kalkuli la integralon [207]. Se konsideri, ke en $t=-\infty$ ne ekzistas perturbo en la sistemo, la jena rezulto troviĝas:

$$a_m^{(1)}(t)=\frac{1}{\hbar}\sum_p\frac{\mu_{mg}\bullet E(\omega_p)}{\omega_{mg}-\omega_p}e^{i(\omega_{mg}-\omega_p)t} \qquad [211]$$

Sciante la amplitudon de probablo por la unua grado kaj uzante la integradon [207] oni povas kalkuli la amplitudon de probablo por aliaj gradoj. La rezulto por la amplitudo de probablo de la dua kaj tria gradoj estas:

$$a_m^{(2)}(t)=\frac{1}{\hbar^2}\sum_{pq}\sum_m\frac{\left[\mu_{nm}\bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg}\bullet E(\omega_p)\right]}{(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}e^{i(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)t} \qquad [212]$$

kaj

$$a_v^{(3)}=\frac{1}{\hbar^3}\sum_{pqr}\sum_{mn}\frac{\left[\mu_{vn}\bullet E(\omega_r)\right]\left[\mu_{nm}\bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg}\bullet E(\omega_p)\right]}{(\omega_{vg}-\omega_p-\omega_q-\omega_r)(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}\times \\ \times e^{i(\omega_{vg}-\omega_p-\omega_q-\omega_r)t} \qquad [213]$$

8.1. Unua grado de polarizeblo

Sciante staton de sistemo oni povas kalkuli elektran dipol-momanton de atomo sub influo de ekstera elektromagneta kampo. La ekspekta valoro de tiu parametro estas:

$$\langle\tilde{p}\rangle=\langle\psi|\widehat{\mu}|\psi\rangle \qquad [214]$$

en kiu ψ estas kvantuma stato de sistemo trovata per la ekvacioj [200] kaj [201] kiam $\lambda=1$. La lineara kontribuo de la ondofunkcio de la sistemo en la dipol-momanto estas:

$$\left\langle \tilde{p} \right\rangle = \left\langle \psi^{(0)} \middle| \mu \middle| \psi^{(1)} \right\rangle + \left\langle \psi^{(1)} \middle| \mu \middle| \psi^{(0)} \right\rangle \qquad [215]$$

La stato de sistemo por grado nul estas donita per ekvacio [202] kaj ĝi por la grado unu estas donita per ekvacio [203]. En tiuj ekvacioj oni devas anstataŭigi la amplitudon de probablo trovita en la ekvacio [211]. Tion farante oni trovas:

$$\left\langle \tilde{p}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar} \sum_p \sum_m \left(\frac{\mu_{gm} \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\omega_{mg} - \omega_p} e^{-i\omega_p t} + \frac{\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]^* \mu_{mg}}{\omega_{mg}^* - \omega_p} e^{i\omega_p t} \right) \qquad [216]$$

Ĉi tie ni supozis, ke ankaŭ negativaj frekvencoj estas permesataj kaj cetere la frekvencoj povas havi kompleksajn valorojn. En la dua termo de ekvacio [216] ni povas formale anstataŭigi ω_p anstataŭ $-\omega_p$. Tiam ni trovas:

$$\left\langle \tilde{p}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar} \sum_p \sum_m \left(\frac{\mu_{gm} \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\omega_{mg} - \omega_p} + \frac{\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right] \mu_{mg}}{\omega_{mg}^* + \omega_p} \right) e^{-i\omega_p t} \qquad [217]$$

La ekvacio povas uziĝi por kalkulo de lineara polarizeblo. Laŭ la kvantuma fiziko makroskopa lineara polarizo estas:

$$\widehat{P}^{(1)} = N \left\langle \widehat{P}^{(1)} \right\rangle = \sum_p P^{(1)}(\omega_p) e^{-i\omega_p t} \qquad [218]$$

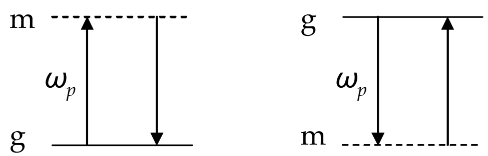
En la ekvacio [218] la lasta parto estas ekspansio de la polarizo laŭ ĝiaj Furieraj komponantoj. Notu, ke la polarizo tiel kiel supre kalkulita havas vektoran karakterizaĵon. Ekvacio [217] temas pri produton de elektra dipol-momanto kaj la vektoro de elektra kampo. La skalaro rezultanta el la supra produto estas aliafoje multiplikata per la dipol-momanto. Tiel la fina rezulto estas vektoro. La lineara polarizeblo estas difinita kiel (vd. la ekvacion [113]):

$$P_i^{(1)}(\omega_p) = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j(\omega_p) \qquad [219]$$

Nun uzante la ekvaciojn [217], [218] kaj [219] oni trovas :

$$\chi_{ij}(\omega_p) = \frac{N}{\hbar} \sum_m \left(\frac{\mu_{gm}^i \mu_{mg}^j}{\omega_{mg} - \omega_p} + \frac{\mu_{gm}^j \mu_{mg}^i}{\omega_{mg}^* + \omega_p} \right) \qquad [220]$$

La unua kaj la dua termoj de la ekvacio [220] respektive, nomiĝas *resonanca* kaj *kontraŭ-resonanca* kontribuoj al la [*lineara*] polarizeblo. La leganto eble memoras, ke la interago de lumondo kun kvantuma sistemo povas esprimiĝi kiel sorbiĝo/elsendiĝo de fotono kaj rezulte de tio kiel transiro inter permesataj energiniveloj de la sistemo. Tion oni povas montri per diagramoj kiel tiu de la bildo 11.



Bildo 11 – Transiroj inter la atomaj energiniveloj kiuj rilatas partojn resonancan kaj kontraŭ-resonancan de la lineara polarizeblo.

8.2. Dua grado de polarizeblo

Nun konante la ondofunkcion por ĉiuj gradoj de N per la priskriboj donitaj en la dinamikaj ekvacioj [211], [212] kaj [213] oni povas trovi aliajn gradojn de la polarizo. Tiuj termoj de la ondofunkcio kiuj kontribuas en la estiĝo de la dua grado de polarizo estas:

$$\left\langle \widehat{p}^{(2)} \right\rangle = \left\langle \psi^{(0)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(2)} \right\rangle + \left\langle \psi^{(1)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(1)} \right\rangle + \left\langle \psi^{(2)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(0)} \right\rangle \qquad [221]$$

Enigante la ondofukcion kaj la amplitudojn eblas trovi :

$$\left\langle \widehat{p}^{(2)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{pq} \sum_{mn} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{gn} \left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q) \right] \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\left(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q \right) \left(\omega_{mg} - \omega_p \right)} e^{-i(\omega_p + \omega_q)t} \\ + \dfrac{\left[\mu_{ng} \bullet E(\omega_q) \right]^* \mu_{nm} \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\left(\omega_{ng}^* - \omega_q \right) \left(\omega_{mg} - \omega_p \right)} e^{-i(\omega_p - \omega_q)t} \\ + \dfrac{\left[\mu_{ng} \bullet E(\omega_q) \right]^* \left[\mu_{mn} \bullet E(\omega_p) \right]^* \mu_{mg}}{\left(\omega_{ng}^* - \omega_q \right) \left(\omega_{mg}^* - \omega_p - \omega_q \right)} e^{i(\omega_p + \omega_q)t} \end{array} \right) \qquad [222]$$

Nun oni povas formale meti ω_q anstataŭ $-\omega_q$ en la dua termo kaj ankaŭ ω_p anstataŭ $-\omega_p$ en la tria termo de la ekvacio. Tiam eblas skribi ĝin en formo:

$$\left\langle \widehat{p}^{(2)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{pq} \sum_{mn} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{gn} \left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q) \right] \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\left(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q \right) \left(\omega_{mg} - \omega_p \right)} \\ + \dfrac{\left[\mu_{ng} \bullet E(\omega_q) \right]^* \mu_{nm} \left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p) \right]}{\left(\omega_{ng}^* + \omega_q \right) \left(\omega_{mg} - \omega_p \right)} \\ + \dfrac{\left[\mu_{ng} \bullet E(\omega_q) \right]^* \left[\mu_{mn} \bullet E(\omega_p) \right]^* \mu_{mg}}{\left(\omega_{ng}^* + \omega_q \right) \left(\omega_{mg}^* + \omega_p + \omega_q \right)} \end{array} \right) e^{-i(\omega_p + \omega_q)t} \qquad [223]$$

Eblas simile al ekvacio [218] difini la duan gradon de la polarizo kiel serion de Furier en formo:

$$\widehat{P}^{(2)} = N\left\langle \tilde{P}^{(2)} \right\rangle = \sum_{r} P^{(2)}(\omega_r)e^{-i\omega_r t} \qquad [224]$$

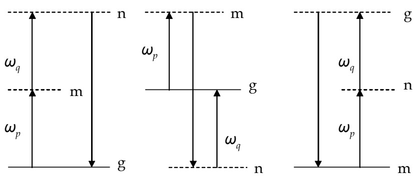
Aliflanke la dua grado de polarizeblo difiniĝas kiel :

$$P_i^{(2)} = \sum_{jk}\sum_{pq} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_p, \omega_q, \omega_p)E_j(\omega_q)E_k(\omega_p) \qquad [225]$$

Tiam la dua grado de polarizeblo simple troviĝas kiel :

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_q, \omega_p) = \frac{N}{\hbar^2}\Im_I \sum_{mn} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{gn}^i \mu_{nm}^j \mu_{mg}^k}{\left(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ + \dfrac{\mu_{gn}^j \mu_{nm}^i \mu_{mg}^k}{\left(\omega_{ng}^* + \omega_q\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ + \dfrac{\mu_{gn}^j \mu_{nm}^k \mu_{mg}^i}{\left(\omega_{ng}^* + \omega_q\right)\left(\omega_{mg}^* + \omega_p + \omega_q\right)} \end{array} \right) \qquad [226]$$

Ĉi tie kun enkonduko de *la permutoperatoro* $\Im_I$ ni simpligas ekvacion [226]. Oni devas skribi similajn termojn, en kiuj ω_p kaj ω_q estas permutataj kaj ankaŭ indicoj i kaj j devas esti permutataj. Entute la dekstra flanko de la ekvacio [226] havos 6 termojn.



Bildo 12 – Transiroj kiuj povas inter atomaj energiniveloj okazi kaj kontribuas la duan gradon de polarizeblo.

8.3. Tria grado de polarizeblo

La sama metodo povas uziĝi por kalkulo de la tria grado de polarizeblo. La termoj de la ondofunkcio, kiuj kontribuas en la tria grado de polarizo, estas:

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{p}^{(3)} \right\rangle &= \left\langle \psi^{(0)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(3)} \right\rangle + \left\langle \psi^{(1)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(2)} \right\rangle \\ &+ \left\langle \psi^{(2)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(1)} \right\rangle + \left\langle \psi^{(3)} \middle| \widehat{\mu} \middle| \psi^{(0)} \right\rangle \end{aligned} \qquad [227]$$

Oni povas skribi la ekvacion en formo :

$$\left\langle \widehat{p}^{(3)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^3}\sum_{pqr}\sum_{mnv} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{gv}\left[\mu_{vn} \bullet E(\omega_r)\right]\left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg} - \omega_r - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ \times e^{-i(\omega_p + \omega_q + \omega_r)t} \\ + \dfrac{\left[\mu_{vg} \bullet E(\omega_r)\right]^* \mu_{vn}\left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg}^* - \omega_r\right)\left(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ \times e^{-i(\omega_p + \omega_q - \omega_r)t} \\ + \dfrac{\left[\mu_{vg} \bullet E(\omega_r)\right]^* \left[\mu_{nv} \bullet E(\omega_q)\right]^* \mu_{nm}\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg}^* - \omega_r\right)\left(\omega_{ng}^* - \omega_r - \omega_q\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ \times e^{-i(\omega_p - \omega_q - \omega_r)t} \\ + \dfrac{\left[\mu_{vg} \bullet E(\omega_r)\right]^* \left[\mu_{nv} \bullet E(\omega_q)\right]^* \left[\mu_{mn} \bullet E(\omega_p)\right]^* \mu_{mg}}{\left(\omega_{vg}^* - \omega_r\right)\left(\omega_{ng}^* - \omega_r - \omega_q\right)\left(\omega_{mg}^* - \omega_r - \omega_q - \omega_p\right)} \\ \times e^{+i(\omega_p + \omega_q + \omega_r)t} \end{array} \right) \qquad [228]$$

Oni povas meti -ω_p, -ω_q kaj -ω_r anstataŭ iliaj pozitivaj kontraŭpartoj en tiuj termoj, en kiuj apera kompleksa konjugito de elektra kampo. Tion farante oni povas skribi:

$$\left\langle \widehat{p}^{(3)} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^3}\sum_{pqr}\sum_{mnv} \left(\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{gv}\left[\mu_{vn} \bullet E(\omega_r)\right]\left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg} - \omega_r - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ + \dfrac{\left[\mu_{gv} \bullet E(\omega_r)\right]\mu_{vn}\left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg}^* + \omega_r\right)\left(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ + \dfrac{\left[\mu_{gv} \bullet E(\omega_r)\right]\left[\mu_{vn} \bullet E(\omega_q)\right]\mu_{nm}\left[\mu_{mg} \bullet E(\omega_p)\right]}{\left(\omega_{vg}^* + \omega_r\right)\left(\omega_{ng}^* + \omega_r + \omega_q\right)\left(\omega_{mg} - \omega_p\right)} \\ + \dfrac{\left[\mu_{gv} \bullet E(\omega_r)\right]\left[\mu_{vn} \bullet E(\omega_q)\right]\left[\mu_{nm} \bullet E(\omega_p)\right]\mu_{mg}}{\left(\omega_{vg}^* + \omega_r\right)\left(\omega_{ng}^* + \omega_r + \omega_q\right)\left(\omega_{mg}^* + \omega_r + \omega_q + \omega_p\right)} \end{array} \right) \qquad [229]$$

$$\times e^{-i(\omega_p + \omega_q + \omega_r)t}$$

Denove, difini la trian gradon de polarizo kaj skribi ĝin kiel ekspansion de la komponantoj de Furier, rezultigas:

$$\tilde{p}^{(3)} = N\left\langle \widehat{p}^{(3)} \right\rangle = \sum_{s} P^{(3)}(\omega_s)e^{-i\omega_s t} \qquad [230]$$

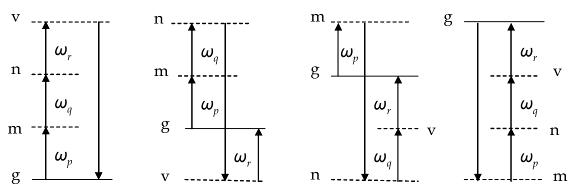
Kaj ankaŭ oni devas skribi la trian gradon de nelineara polarizo kiel funkcion de la tria grado de polarizeblo. Tio donas:

$$P_k^{(3)}(\omega_p+\omega_q+\omega_r)=\sum_{hi}\sum_{jpqr}\chi_{kjih}^{(3)}(\omega_\sigma,\omega_r,\omega_q,\omega_p)E_j(\omega_r)E_i(\omega_q)E_h(\omega_p) \quad [231]$$

Finfine la tria grado de polarizeblo povas skribiĝi en formo :

$$\chi_{kjih}^{(3)}=\frac{N}{\hbar^3}\Im_I\sum_{mnv}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\mu_{gv}^k\mu_{vn}^j\mu_{nm}^i\mu_{mg}^h}{(\omega_{vg}-\omega_r-\omega_q-\omega_p)(\omega_{ng}-\omega_q-\omega_p)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\+\dfrac{\mu_{gv}^j\mu_{vn}^k\mu_{nm}^i\mu_{mg}^h}{(\omega_{vg}^*+\omega_r)(\omega_{ng}-\omega_q-\omega_p)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\+\dfrac{\mu_{gv}^j\mu_{vn}^i\mu_{nm}^k\mu_{mg}^h}{(\omega_{vg}^*+\omega_r)(\omega_{ng}^*+\omega_r+\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\+\dfrac{\mu_{gv}^j\mu_{vn}^i\mu_{nm}^k\mu_{mg}^h}{(\omega_{vg}^*+\omega_r)(\omega_{ng}^*+\omega_r+\omega_q)(\omega_{mg}^*+\omega_r+\omega_q+\omega_p)}\end{array}\right) \quad [232]$$

Por trovi pli simplan formon de ekvacio [232] ni uzis la permutoperatoron $\Im_I$. Tiel en la ekvacio ni skribis 4 termojn, sed aplikante la permutoperatoron en la dekstra flanko de la ekvacio ni ricevas 24 termojn.



Bildo 13 – Transiroj kiuj povas inter atomaj energiniveloj okazi kaj kontribuas la trian gradon de polarizeblo.

9. Aldonoj

9.1. Kelkaj fizikaj konstantoj

Lumorapido en vakuo	c	2.9979×10^{8}	m/s
Elektra permitivo en vakuo	ε_0	8.8542×10^{-12}	F/m
Magneta permitivo en vakuo	μ_0	1.2566×10^{-6}	H/m
Impedanco de vakuo	η_0	376.73	Ω
Elektra ŝargo de elektrono	e	1.6022×10^{-19}	C

9.2. Literaturo

Bloembergen N., (1992) *Nonlinear Optics*, Redwood City, Addison-Wesley.

Boyd R. W., (1991) *Nonlinear Optics*, Boston, Academic Press.

Butcher P. N., Cotter D., (1990) *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press.

Mills D. L., (1998) *Nonlinear Optics: Basic Concepts*, New York, Springer.

Sauter E. G., (1996) *Nonlinear Optics*, New York, Wiley.

Shen Y. R., (1996) *The Principles of Nonlinear Optics*, New York, Wiley.

Sutherland R. L., (1996) *Handbook of Nonlinear Optics*, New York, Marcel Dekker.

Yariv A., (1989) *Quantum Electronics*, New York, Wiley.

9.3. Glosaro

Esperanto	***English***	***Français***
centre simetria	centrosymmetric	centrosymétrique
dipol-momanto	dipole moment	dipôle moment
ebena ondo	plane wave	onde plane
elektra delokiĝo	electric displacement	déplacement électrique
elektra polarizeblo	electric susceptibility	susciptibilité électrique
faza malakordo	phase mismatch	discordance de phase
fazoakordo	phase matching	accord de phase
froto	friction	friction
genero de dua harmono	second harmonic generation	génération de deuxième harmonique
idla radio	idler beam	faisceau complémentaire
koeficiento de malharmoneco	anharmonicity coefficient	coéfficient de non-harmonicité
koeficiento de sorbiĝo	absorption coefficient	coefficient d'absorption
koherlongo	coherence length	longueur de cohérence
kompleksa konjugito	complex conjugate	complexe conjugué
malrapide varianta envelopo	slowly varying envelope	enveloppe avec une variation lente
memenfokusiĝo	self-focusing	auto-focalisation

ne centre simetria	non-centrosymmetric	non-centrosymétrique
optika parametra oscilanto	optical parametric oscillator	oscillateur paramétrique optique
parabola potencialo	parabolic potential	potentiel parabolique
permutoperatoro	permutation operator	operateur de permutation
refraktindico	refractive index	indice de refraction
relaksa oscilado	relaxed oscilation	oscillation relaxée
simpla perturbo	simple perturbation	perturbation simple
strukturo periode polarizita	periodic poled structure	structure périodiquement polarisé
unuharmona	simple harmonic	harmonique simple