

# Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II  
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

8-a de januaro, 2007

## Resumo

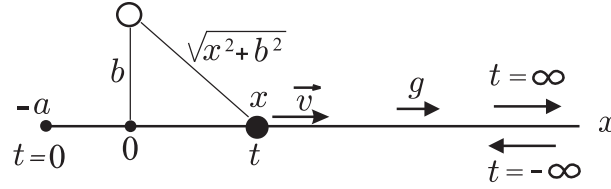
Observanto ĉe rekta movo ĉe konstanta propra akcelo pasas preter restanta fonto de unukolora radiado. Ĉe la special-relativeco, ni priskribas la observatan Doppleran efekton. Ni ankaŭ priskribas la interesan nekontinuan efekton se trapaso okazas.

-----  
An observer, in rectilinear motion under constant proper acceleration, passes near a source of monochromatic radiation at rest. In the context of special relativity, we describe the observed Doppler effect. We describe also the interesting discontinuous effect when riding through occurs. An English version of this article is available.

## 1 Enkonduko

Ĉe special-relativeco, la rekta movo ĉe konstanta propra akcelo estis studata, ekzemple, per Møller [1, paĝo 72], per Rindler [2, paĝo 49], per Dwayne Hamilton [3] kaj per Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22]. Ankaŭ bone konata estas la Dopplera efekto de unukolora radiado eligita el restanta fonto, vidata per observanto tiel akcelata. Tamen, oni ofte evitas la studon de okazoj kies la observanto pasas preter la eliganto. Ĉiokaze estas granda ŝanĝo de la observata frekvenco. Ŝajnas ke nur Cochran [5] apenaŭ menciis tion.

Ĉi tie ni daŭrigas Rothenstein, Popescu, kaj Gruber [6], kiu freŝdate studis okazojn kies la observanto alproksimiĝas al la fonto, sed ne pasas preter ĝi. Kontraŭe, nia studo konsideras preterpasojn, kaj ankaŭ trapasojn.



Figuro 1: Luma fonto (blanka sfereto) estas fiksa distance  $b$  de akso  $x$ . Observanto (nigra sfereto) venis el  $x = \infty$  ( $t = -\infty$ ) ĝis  $x = -a$  ( $t = 0$ ). Poste li revenos al  $x = \infty$  ( $t = \infty$ ).

## 2 Kinematika priskribo

Luma fonto estas fiksa distance  $b$  de akso  $x$ , kaj daŭre eligas radiadon kun konstanta frekvenco  $\nu$ . Kiel figuro 1 montras, observanto venis el  $x = \infty$ , kiam<sup>1</sup>  $t = -\infty$ . Lia komenca rapido estis multe granda,  $v \approx -c$ , sed li grade bremsiĝis kaŭze de lia propra konstanta malakcelo  $g > 0$ . La observanto apenaŭ atingis  $x = -a < 0$  ĉe momento  $t = 0$ , kaj tuj ekrevenos same akcelate al  $x = \infty$ . Ni studos la variadon de la *vidata*<sup>2</sup> frekvenco  $\nu_{obs}$  dum la movado ekde  $t = -\infty$  ĝis  $t = \infty$ .

Kontraŭe kutima literaturo, kie  $a = -c^2/g$ , atentu ke ĉi tie  $a$  estas iom ajn pozitiva. Tiamaniere, ni ebligas la interesajn studojn de preterpaso ( $b \neq 0$ ) kaj trapaso ( $b = 0$ ).

Por simpligi formulojn ni formale konsideros  $c = 1$  kaj  $g = 1$ . Por aperigi la arbitrajn valorojn sufiĉas substitui

$$a \rightarrow ag/c^2, \quad b \rightarrow bg/c^2, \quad x \rightarrow gx/c^2, \quad v \rightarrow v/c, \quad t \rightarrow gt/c, \quad \tau \rightarrow g\tau/c. \quad (1)$$

Ĉe la inercia referenco-sistemo de la fonto, la diferenciala ekvacio de movado de observanto ĉe propra akcelo  $g$  estas [2, paĝo 49]<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) = 1, \quad v := \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Tiu, integralante kun  $v=0$  kiam  $t=0$ , estante  $g$  konstanta, estiĝas la observanta rapido

$$v = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad (3)$$

atentu ke la signumoj de  $v$  kaj  $t$  estas samaj. Tiu, integralante kun  $x = -a$  kiam  $t=0$ , estiĝas la spaco-tempa hiperbolo  $(x + 1 + a)^2 - t^2 = 1$ ; do la pozicio de observanto ĉe momento  $t$  estas

$$x = -a + \sqrt{1+t^2} - 1. \quad (4)$$

<sup>1</sup>Por mezuri  $t$  ĉe la inercia referenco-sistemo de la fonto, horloĝaro estas supozata distribuata laŭ akso  $x$ . Ĉiu horloĝo estas sinkrona al tio de la fonto.

<sup>2</sup>Ni emfazas la verbon “vidi” por signifi ke tio ne estas nur kalkulita koordinata efekto, sed vere estas la *observata* efekto.

<sup>3</sup>Uzante (1), la unua de (2) skribiĝus  $d\left(\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)/d(gt/c) = 1$ , kiu simpliĝus al la pli familiara  $d\left(\frac{v/\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt} = g\right)$ .

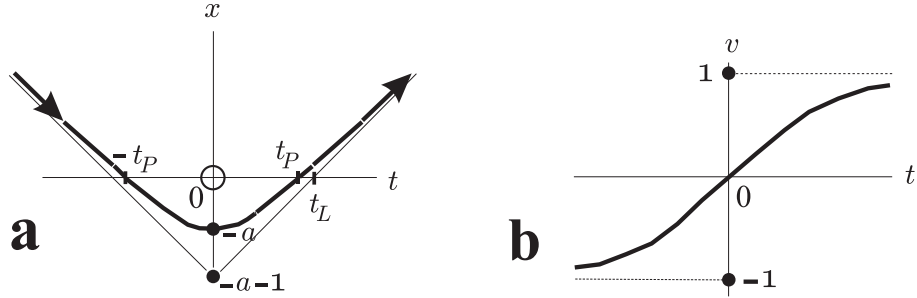
La preter(tra)paso okazas dufoje ĉe  $x = 0$ , kiel figuro 2.a montras; la du momentoj de preter(tra)paso estas  $t = \mp t_P$ , estante

$$t_P := \sqrt{a^2 + 2a} . \quad (5)$$

Figuro 2.a montras ankaŭ, ke lumo atinganta observanton devas eliĝi je  $t < t_L$ , estante

$$t_L := a + 1 ; \quad (6)$$

atentu ke  $t_L^2 = t_P^2 + 1$ , kaj ke nek  $t_P$  nek  $t_L$  dependas de  $b$ .



Figuro 2: Funkcioj  $x(t)$  kaj  $v(t)$ .

**2.a** La radiantanta fonto (blanka sfereto) estas fiksa en  $x = 0$ , kaj la observanto estas ĉe hiperbola movado (4); li venis el  $x = \infty$ , pasas preter la fonto kiam  $t = -t_P$ , atingas  $x = -a < 0$  kiam  $t = 0$ , denove pasas preter la fonto kiam  $t = t_P$ , kaj fine revenos al  $x = \infty$ .

**2.b** La observanta rapido (3), kiu kontinue varias de  $-c$  (kiam  $t = -\infty$ ) ĝis  $c$  (kiam  $t = \infty$ ).

### 3 Dopplera efekto kun preterpaso

Supozu ke moviĝanta observanto ricevas du lumajn signalojn, je momentoj  $t$  kaj  $t + dt$ , ĉe pozicioj  $x$  kaj  $x + dx$ . Tiu signaloj estis eligataj je la antaŭaj momentoj  $t_E$  kaj  $t_E + dt_E$ . Figuro 1 montras ke

$$t_E = t - \sqrt{x^2 + b^2} . \quad (7)$$

Ĉe la horloĝo de moviĝanta observanto, la *propra* tempo inter la du ricevoj estas  $d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt$ , estante  $v(t) = dx/dt$  la rapido de la observanto. La frekvenco  $\nu_{obs}$  vidata per observanto rilatas, al la frekvenco  $\nu$  de la lumo eligata, kiel  $\nu_{obs}/\nu = dt_E/d\tau$ . Simplaj kalkuloj donas

$$\nu_{obs}/\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left( 1 - \frac{xv}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) , \quad (8)$$

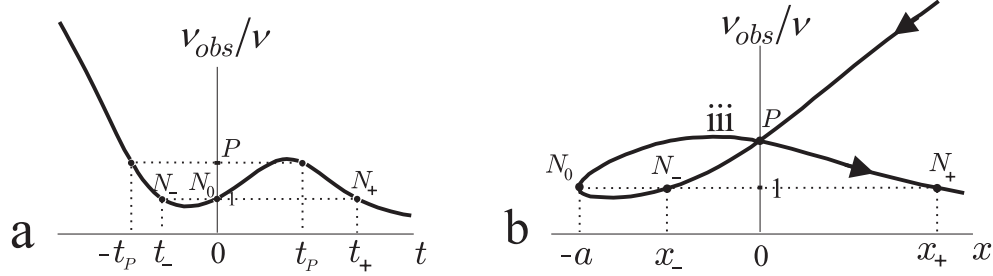
kui uzante (3) kaj (4) skribiĝas

$$\nu_{obs}/\nu = \sqrt{1 + t^2} - \frac{tx}{\sqrt{x^2 + b^2}} . \quad (9)$$

Atentu ke tiuj  $t$  kaj  $x$  estas la momento kaj pozicio de *ricevo* de radiado. Por havi  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de nur  $t$ , uzu (4); kaj por havi  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de nur  $x$ , uzu la inverso de (4),

$$t = \epsilon \sqrt{(a + 1 + x)^2 - 1} , \quad \epsilon := t/|t| . \quad (10)$$

Figuro 3 montras tiujn du funkciojn. Memoru ke se  $\nu_{obs}/\nu > 1$ , okazas viol-delokigon; se  $\nu_{obs}/\nu < 1$ , okazas ruĝ-delokigon; kaj se  $\nu_{obs}/\nu = 1$ , la Dopplera efekto estas nula.



Figuro 3:

**3.a**  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de fonta horloĝaro  $t$ .

**3.b**  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de observanta pozicio  $x$ . Sagoj montras la pozitivan tempan fluan. Se  $b$  estas sufiĉe granda ( $b > ct_P$ ), la inklinaĵo de **iii** ĉe  $P$  estas pozitiva.

Tri rimarkoj ŝajnas gravaj pri tiuj grafkoj. Unue, ĉe figuro 3.a vidu asimptoton  $\nu_{obs}/\nu = -2t$  kiam  $t \rightarrow -\infty$ , kaj hiperbolon  $\nu_{obs}/\nu = (1 + b^2)/(2t)$  kiam  $t \rightarrow \infty$ . Kaj ĉe figuro 3.b la asimptoto estas  $2(x + a + 1)$  kiam  $t \rightarrow -\infty$ , kaj la hiperbolo estas  $(1 + b^2)/(2x)$  kiam  $t \rightarrow \infty$ .

Due, ni kalkulas la Doppleran efekton ĉe la momentoj de preterpaso (ortan Doppleran efekton). Uzante  $\{t = \mp t_P, x = 0\}$  kaj (5) ĉe (9), la efekto estiĝas  $1 + a$ , kiun ni nomas  $P$ :

$$P := 1 + a . \quad (11)$$

Atentu ke ĝi ne dependas de  $b$ , kaj ke la orta Dopplera efekto pri preterpasanta observanto estas *viol*-delokigo. Estas interesa noti ke pri preterpasanta fonto kaj restanta observanto, la orta Dopplera efekto estas *ruĝ*-delokigo, kion ni vidos ĉe estonta artikolo.

Trie, ni kalkulas la momentojn kaj poziciojn de nula Dopplera efekto, farante  $\nu_{obs}/\nu = 1$  ĉe (9), kun  $b \neq 0$ . Tiu okazas trifoje, kiel figuro 3 montras. Krom la bonkonata  $N_0 \{t = 0, x = -a\}$  de momente haltata observanto ( $v = 0$ ), ankaŭ okazas  $N_-$  kaj  $N_+$ , en kiuj la observanto estas moviĝanta [7]. La du novaj pozicioj, momentoj, kaj rapidoj estas (memoru,  $\epsilon = \mp 1$  estas la signumo de  $t$ )

$$x_\epsilon = \frac{b^2}{4} \left( 1 + \epsilon \sqrt{1 + 8a/b^2} \right) , \quad t_\epsilon = \epsilon \sqrt{(a + 1 + x_\epsilon)^2 - 1} , \quad v_\epsilon = \frac{t_\epsilon}{a + 1 + x_\epsilon} . \quad (12)$$

Atentu ke  $x_+ > |x_-|$ ,  $t_+ > |t_-|$ , kaj  $v_+ > |v_-|$ .

Nun ni resumas tiujn rezultojn. La observanto unue *vidas* malgrandiĝantan viol-delokigon ĝis  $\{t_-, x_-\}$ . Je  $t_-$  estas nula Dopplera efekto. De  $t_-$  ĝis  $\{t = 0, x = -a\}$  li *vidas* grandiĝantan kaj poste malgrandiĝantan ruĝ-delokigon. Je  $\{t = 0, x = -a\}$  li estas momente haltata kaj do *vidas*

nulan Doppleran efekton. De  $\{t=0, x=-a\}$  ĝis  $\{t_+, x_+\}$  li *vidas* viol-delokigon, kiu grandiĝas kaj poste malgrandiĝas. En  $\{t_+, x_+\}$  li *vidas* nulan efekton. Poste li *vidas* ruĝ-delokigon kiu grandiĝas. Atentu ke ĉe la momentoj  $\mp t_P$  de preterpaso ( $b \neq 0$ ) ne okazas speciala ŝanĝo de Dopplera efekto.

## 4 Dopplera efekto kun trapaso

Se  $b=0$  trapaso okazas ĉe  $x=0$ , kaj pluraj variabloj malkontinueiĝas je la du momentoj  $\mp t_P$  de trapaso. Fakte, la (9) kun  $b=0$  simpliĝas al

$$\nu_{obs}/\nu = \sqrt{1+t^2} - \epsilon_x t, \quad (13)$$

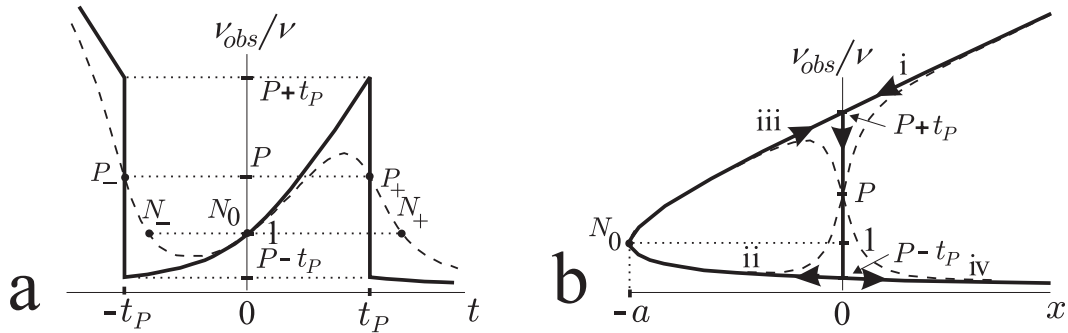
estante  $\epsilon_x := x/|x|$  la signumo de  $x$ . Uzante ekvaciojn (4) kaj (5) ni konkludas ke la signumo de  $x$  estas sama al la signumo de  $t^2 - t_P^2$ , tial (13) estas skribebla kiel funkcio de nur  $t$ ,

$$\nu_{obs}/\nu = \begin{cases} \sqrt{1+t^2} - t, & |t| > t_P, \\ \sqrt{1+t^2} + t, & |t| < t_P. \end{cases} \quad (14)$$

Por skribi  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de nur  $x$  kaj  $\epsilon$ , ni uzas (10) en (13),

$$\nu_{obs}/\nu = 1 + a + x - \epsilon \epsilon_x \sqrt{(a+1+x)^2 - 1}. \quad (15)$$

Figuro 4 montras la malkontinuecon de  $\nu_{obs}/\nu$  je la momentoj  $-t_P$  kaj  $t_P$ . La valoro de tiu malkontinueco estas, de (14),  $2t_P$ .



Figuro 4:

**4.a** montras  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de horloĝara tempo  $t$ . La plenlinio rilatas al trapaso ( $b=0$ , ekvacioj (14)). Por komparado, la streklinio rilatas al preterpaso (9), kun  $b=a/2$ .

**4.b** montras  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de observanta pozicio  $x$ . La plenlinio rilatas al trapaso ( $b=0$ , ekvacio (15)); atentu la tempordan ordon **i**, **ii**, **iii**, **iv**. Por komparado, la streklinio rilatas al preterpaso (9), kun  $b=a/10$ .

## 5 Observanta propratempo

La observanto povas preferi uzi sian propratempojn  $\tau$ , anstataŭ uzi la tempon  $t$  de la fonta horloĝaro. La taktoj de tiuj du tempoj rilatas kiel  $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$ ; integralante uzante la rapidon  $v$  de (3) kaj la kondiĉon  $\tau=0$  kiam  $t=0$ , tiu estiĝas

$$t = \sinh \tau . \quad (16)$$

Uzante  $\tau$ , la pozicio (4) kaj la rapido (3) de la observanto skribiĝas

$$x = -a + \cosh \tau - 1, \quad v = \tanh \tau , \quad (17)$$

kaj la momentoj (5) de preter(tra)paso estiĝas  $\mp \tau_P$ , estante

$$\tau_P = \cosh^{-1}(1 + a) . \quad (18)$$

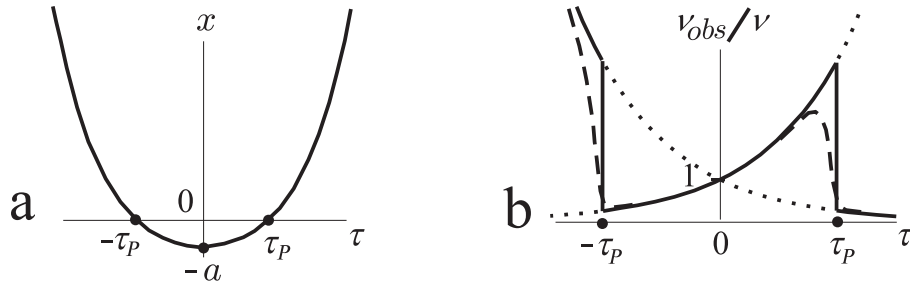
Ĉe preterpaso ( $b \neq 0$ ) la Dopplera efekto (9) kiel funkcio de  $\tau$  skribiĝas

$$\nu_{obs}/\nu = \cosh \tau - \frac{x \sinh \tau}{\sqrt{x^2 + b^2}} , \quad (19)$$

kie  $x(\tau)$  estas ĉe (17) . Atentu ke ĉe trapaso ( $b=0$ ), la (19) multe simpliĝas:

$$\nu_{obs}/\nu = \begin{cases} e^{-\tau}, & |\tau| > \tau_P , \\ e^{\tau} , & |\tau| < \tau_P . \end{cases} \quad (20)$$

Figuro 5.b montras kontinuan funkcion (19) kaj nekontinuan funkcion (20).



Figuro 5:

**5.a** Katenario montranta pozicion  $x$  kiel funkcio (17) de observanta propratempo  $\tau$ .

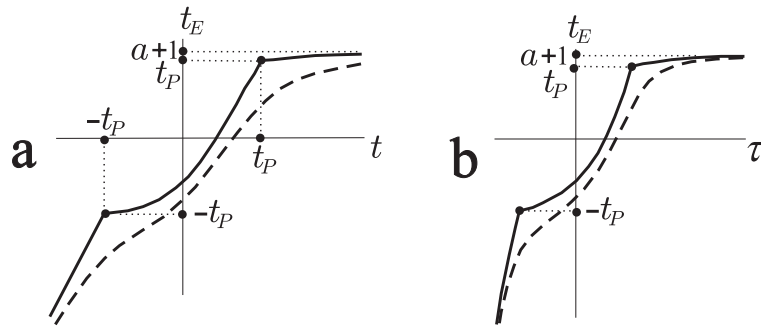
**5.b** montras  $\nu_{obs}/\nu$  kiel funkcio de observanta propratempo  $\tau$ . La plenlinio rilatas al trapaso ( $b=0$ ), kaj la streklinio rilatas al preterpaso (19) kun  $b=a/10$ . Punktlinioj montras eksponencialojn  $e^{-\tau}$  kaj  $e^{\tau}$ .

## 6 Komentoj

La grafiko 3.a montras onduman formon; tio okazas, ĉar la ekvacio (8) de Dopplera efekto havas du faktorojn. La unua faktoro dependas kvadrante je la rapido  $v$ , kaj kaŭzas ĉiam viol-delokigon. La dua faktoro dependas lineare je la rapido, kaj dependas ankaŭ je la pozicio  $x$ ; ĉi tiu faktoro povas kaŭzi ruĝ- aŭ viol-delokigon. Estas la batalo inter tiuj du faktoroj kiu determinas la onduman formon de la Dopplera efekto.

Nova artikolo estas skribonta, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – II*. Tie ni studos okazojn kies la observanto restas, kaj la eliganta fonto moviĝas pasante preter aŭ tra la observanto.

Fine, ŝajnas interesa vidu kiel interrilatigas, la pluraj tempoj uzataj en ĉi tiu artikolo. Figuro 6 montras  $t_E(t)$  kaj  $t_E(\tau)$ , por kaj preterpaso kaj trapaso. Vidu ĉe 6.b ke la inklinacioj  $dt_E/d\tau$  estas la Dopplera faktoro  $\nu_{obs}/\nu$ , kiel ĉe figuro 5.b.



Figuro 6:

**6.a** Funkcio  $t_E(t)$ , ekvacio (7). La plenlinio rilatas al trapaso ( $b=0$ ), kaj la streklinio rilatas al preterpaso kun  $b = a$ . Vidu asimptoton  $t_E = a + 1$ .

**6.b** Funkcio  $t_E(\tau)$ , ekvacioj (16) kaj (7). La plenlinio rilatas al trapaso ( $b=0$ ), kaj la streklinio rilatas al preterpaso kun  $b = a$ . Vidu asimptoton  $t_E = a + 1$ .

## Citaĵoj

- [1] C Møller, *The theory of relativity, 2nd ed.*, Oxford U P, 1972;
- [2] W Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag, 1977;
- [3] J Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am J Phys **46** 83-9 (1978);
- [4] L D Landau, E M Lifshitz, *The classical theory of fields, 4th rev. English ed.*, Butterworth-Heinemann, 1996;
- [5] W Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am J Phys **57** 1039-41 (1989);

- [6] B Rothenstein, S Popescu, *Period measurements by accelerating observers*, <http://arxiv.org/abs/physics/0607030> , 13 paĝoj;  
*Time interval measurements by uniformly accelerating observers (non-longitudinal case)*, physics/0607288, 14 paĝoj;  
*The system of uniformly accelerating observers*, physics/0610049, 17 paĝoj;  
+ R P Gruber, *Landing the uniformly accelerating observers*, physics/0610226, 8 paĝoj;
- [7] F M Paiva, A F F Teixeira (2006), “La relativeca tempo - I”, <http://arxiv.org/abs/physics/0603053> , 12 paĝoj.